Aufgabe 54:

a) Welche Werte kann die Determinante einer reellen orthogonalen Matrix annehmen?

b) Bestimmen Sie eine Spiegelung, die den Vektor $(1,1,1,1)^T$ auf ein geeignetes Vielfaches des Einheitsvektors $e_1 = (1,0,0,0)^T$ abbildet (vgl. QR-Zerlegung).

c) Was ist die Umkehrabbildung dieser Spiegelung?

d) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 55: Geben Sie die Taylorentwicklung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(a,b) = \ln(1 + a^2 + b^2)$$

um den Nullpunkt bis zur Ordnung zwei – d.h. mit Restglied $\mathcal{O}(\|\cdot\|^3)$ – an.

Aufgabe 56:

a) Geben Sie den Satz von Gauß an.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ und $Q = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat. Sei ferner $\Gamma = \partial Q$ die Kurve, die den Rand des Einheitsquadrats beschreibt und $\nu(x)$ die äußere Normale an $\Gamma = \partial Q$. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma f(x) \cdot \nu(x)\, dl.$$

c) Geben Sie an, wie man mit Hilfe des Satzes von Gauß das Volumen eines Körpers bestimmen kann, indem man eine geeignete Funktion über dessen Oberfläche integriert.