Aufgabe 54:

a) Welche Werte kann die Determinante einer reellen orthogonalen Matrix annehmen?

b) Bestimmen Sie eine Spiegelung, die den Vektor $(1,1,1,1)^T$ auf ein geeignetes Vielfaches des Einheitsvektors $e_1 = (1,0,0,0)^T$ abbildet (vgl. QR-Zerlegung).

c) Was ist die Umkehrabbildung dieser Spiegelung?

d) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

a) Es sei U eine orthogonale Matrix. Dann gilt $UU^T = I$ und somit

$$\det(UU^T) = 1 \Rightarrow \det(U)\det(U^T) = 1 \Rightarrow (\det(U))^2 = 1 \Rightarrow \det(U) = \pm 1.$$

b) Es sei $u = (1,1,1,1)^T$. Wir suchen einen Vektor v und eien reelle Zahl α, so dass die Spiegelung $Q = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ die Bedingung $Qu = \alpha e_1$ erfüllt. Wählen wir

$$\alpha = -\operatorname{sign}(u_1)\|u\|_2 = -\sqrt{4} = -2$$

und

$$v = u - \alpha e_1 = (3,1,1,1)^T$$

Die Spiegelung ist dann

$$Q = I - \frac{2}{v^Tv}vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{12}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

c) Eine Spiegelung ist orthogonale und symmetrische Abbildung. Daher gilt $Q^{-1} = Q^T = Q$.

d) Es sei $a_1 = (3,-4)^T$ und somit

$$\alpha_1 = -\operatorname{sign}(a_{11})\|a_1\|_2 = -\sqrt{25} = -5.$$

Daher folgt

$$v_1 = a_1 - \alpha_1(1,1)^T = (8,-4)^T$$

und

$$Q^{(1)} = I - \frac{2}{v_1^Tv_1}v_1v_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Des Weiteren gilt

$$R = Q^{(1)}A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

und somit

$$A = QR = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55: Geben Sie die Taylorentwicklung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(a, b) = \ln(1 + a^2 + b^2)$$

um den Nullpunkt bis zur Ordnung zwei – d.h. mit Restglied $\mathcal{O}(\|\cdot\|^3)$ – an.

LÖSUNG: Der Gradient von f im Punkt $x = (a, b)^T$ ist

$$\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b})^T = (\frac{2a}{1 + a^2 + b^2}, \frac{2b}{1 + a^2 + b^2})^T$$

und die Hessische

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(1-a^2+b^2)}{(1+a^2+b^2)^2} & -\frac{4ab}{(1+a^2+b^2)^2} \\ -\frac{4ab}{(1+a^2+b^2)^2} & \frac{2(1+a^2-b^2)}{(1+a^2+b^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $(0, 0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0,0) + \nabla f(0,0)^T x + \frac{1}{2} x^T D^2 f(0,0)\, x + \mathrm{O}(\|x\|^3) \\ &= \ln(1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \mathrm{O}(\|x\|^3) \\ &= a^2 + b^2 + \mathrm{O}(\|x\|^3). \end{aligned}$$

Aufgabe 56:

a) Geben Sie den Satz von Gauß an.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ und $Q = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat. Sei ferner $\Gamma = \partial Q$ die Kurve, die den Rand des Einheitsquadrats beschreibt und $\nu(x)$ die äußere Normale an $\Gamma = \partial Q$. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma f(x) \cdot \nu(x)\, dl.$$

c) Geben Sie an, wie man mit Hilfe des Satzes von Gauß das Volumen eines Körpers bestimmen kann, indem man eine geeignete Funktion über dessen Oberfläche integriert.

LÖSUNG:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ eine glatte Fläche (in dem Sinn, dass der Rand $\partial\Omega$ eine lokale, stetig differenzierbare Parametrisierung besitzt), mit $N(x)$ bezeichnen wir die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\bar{\Omega}$

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot N(x)\,\mathrm{d}a.$$

b)

- *Mit Gauß:*

$$\int_\Gamma f(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}l = \int_Q \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}a = 0$$

since $\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1)}{\partial x_2} = 0.$

- *Ohne Gauß:* Wir unterteilen Γ in 4 Teilstücke:

i) Γ_1 von $(0,0)$ bis $(1,0)$ mit dazugehöriger Normalen $\nu_1 = (0,-1)^T$:

$$\int_{\Gamma_1} f(x) \cdot \nu_1\,\mathrm{d}l = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$$

ii) Γ_2 von $(1,0)$ bis $(1,1)$ mit dazugehöriger Normalen $\nu_2 = (1,0)^T$:

$$\int_{\Gamma_2} f(x) \cdot \nu_2\,\mathrm{d}l = \int_0^1 \begin{pmatrix} -y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (-y)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}$$

iii) Γ_3 von $(0,1)$ bis $(1,1)$ mit dazugehöriger Normalen $\nu_3 = (0,1)^T$:

$$\int_{\Gamma_3} f(x) \cdot \nu_3\,\mathrm{d}l = \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

iv) Γ_4 von $(0,0)$ bis $(1,0)$ mit dazugehöriger Normalen $\nu_4 = (-1,0)^T$:

$$\int_{\Gamma_4} f(x) \cdot \nu_4\,\mathrm{d}l = \int_0^1 \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

Durch Aufsummierung der einzelnen Integrale erhalten wir

$$\int_\Gamma f(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}l = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} f(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}l = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

c) Betrachte das Vektorfeld $f(x) = \frac{1}{3}(x_1, x_2, x_3)^T$ in $\mathbb{R}^3$. Durch einfache Berechnung folgt $\operatorname{div} f(x) = 1$. Sei nun $K \subset \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Körper der die Bedingungen für den Satz von Gauß erfüllt (siehe a)), dann gilt

$$\int_{\partial K} f(x) \cdot N(x)\,\mathrm{d}a = \int_K \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_K \mathrm{d}x = \operatorname{vol} K$$

Somit ist die gesuchte Funktion $f(x) \cdot N(x)$.