



# Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15  
Prof. Mario Bebendorf  
Jos Gesenhues



## 5. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag, 18.11.**

---

### Aufgabe 1. (Zur Diskretisierung der Poisson-Gleichung)

Betrachtet wird das Randwertproblem aus Beispiel 1.32 aus der Vorlesung auf einem Gebiet  $\Omega$ . Bestimme die Gestalt der Matrix  $L_h$  für jeden der folgenden beiden Fälle.

- Statt  $(0, 1)^2$  sei  $\Omega := (0, a) \times (0, b)$  und die Schrittweite  $h$  erfülle die Bedingungen  $a = nh$  bzw.  $b = mh$ .
- Statt der lexikographischen werde die Anordnung nach dem sog. Schachbrettmuster verwendet. Dabei werden zunächst die  $u_{ij}$  mit gerader Summe  $i + j$  („schwarze Felder“) und danach jene mit ungerader Summe („weiße Felder“) lexikographisch durchnummeriert.

---

### Aufgabe 2. (Eine Funktion aus $C_0^\infty$ )

Es sei  $c \in \mathbb{R}$  und

$$\varphi(x) := \begin{cases} c \cdot e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

- Zeige, dass  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar ist.
- Ist der Raum  $C_0^\infty(\Omega)$  zusammen mit dem  $L^2$ -Skalarprodukt vollständig?

---

### Aufgabe 3. (Minkowski-Ungleichung)

Zeige, dass mit  $u, v \in L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , die Dreiecksungleichung

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

für die  $L^p$ -Norm erfüllt ist.

---

Abgabe der Programmieraufgabe am 26.11. oder am 27.11. in der Übung

**Programmieraufgabe.** (Shortley-Weller-Approximation)

Gesucht ist bei dieser Aufgabe die Lösung der Laplace-Gleichung auf dem Einheitskreis  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  mit den Randwerten  $u(x, y) = e^x \sin y$  für  $(x, y) \in \delta\Omega$ . Die analytische Lösung ist offenbar  $u(x, y) = e^x \sin y$ .

Programmiere das Shortley-Weller-Verfahren und bestätige die Konvergenz zweiter Ordnung numerisch. Gib die Ergebnisse als Graph aus.

Bestätige darüber hinaus die Stabilität des Verfahrens, indem du in einem weiteren Graphen die Entwicklung der Norm der Inversen der Systemmatrix aus gibst.

*Hinweis:* Die Programmieraufgaben sind mit C/C++ zu bearbeiten. Für die Abgabe ist entweder ein Laptop mit dem lauffähigen Programm oder ein Ausdruck des Quelltextes sowie jeweils die geforderte Ausgabe mit ins Tutorium zu bringen.

---

*Hinweis:* Es wäre hilfreich, wenn auf der Abgabe einmalig die Mail-Adressen angegeben wären, um z.B. im Falle der kurzfristigen Erkrankung des jeweiligen Tutors Bescheid geben zu können. Darüber hinaus wird darum gebeten, die Abgaben zu tackern oder zu heften. Bei Bedarf können gern Büroklammern in Raum 4.004 abgeholt werden.

Es wird darum gebeten, in Gruppen von zwei bis vier Personen abzugeben.

Die Fachschaft hat gebeten, folgendes zu veröffentlichen:

“Am 18.11 um 18 Uhr findet im großen Hörsaal eine Vollversammlung aller Mathematikstudierenden statt, organisiert durch die Fachschaft Mathematik. Zentrale Themen werden sein: Interimsmensa, Verbesserung der Prüfungsordnung und Orts-NC. Nähere Informationen findet ihr in den Glaskästen im Nebengebäude sowie auf [fsmath.uni-bonn.de](http://fsmath.uni-bonn.de). Erscheint zahlreich!”