Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2014/15
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

7. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **02.12.**

Aufgabe 1. (Ein Randwertproblem ohne Lösung)

Auf dem Intervall $[0,1]$ sei die Bilinearform a gegeben durch

$$a(u,v) := \int_0^1 x^2 u'(x) v'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Wie lautet die Randwertaufgabe, die zum Variationsproblem

$$\frac{1}{2} a(u,u) - \int_0^1 u(x) \,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \min$$

gehört? Zeige, dass dieses Problem keine Lösung in $H_0^1(0,1)$ besitzt.

Aufgabe 2. (Neumann- und Robin-Randwerte)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$. Betrachtet wird das Poisson-Problem $-\Delta u = f$ in Ω mit $\beta u + \nu^T \nabla u = g$ auf $\partial\Omega$.

a) Im Raum $V := H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ werden zwei Funktionen miteinander identifiziert, wenn sie sich nur um eine Konstante unterscheiden.

   Zeige, dass V mit $(u,v)_V := (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ ein Hilbert-Raum ist und beweise im Fall $\beta = 0$ die Existenz einer eindeutigen Lösung.

b) Wähle im Fall $\beta > 0$ einen geeigneten Hilbert-Raum V und eine Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$, um die Existenz einer eindeutigen Lösung zu zeigen.

Aufgabe 3. (Springende Koeffizienten)

Das beschränkte Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei durch eine stückweise glatte Kurve Γ in zwei Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 geteilt. Mit $\alpha_1 \gg \alpha_2 > 0$ sei $a(x) := \alpha_i$ für $x \in \Omega_i$, $i = 1, 2$. Zeige, dass für jede klassische Lösung der Variationsaufgabe

$$\int_\Omega a (\nabla u)^T \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

in $H_0^1(\Omega)$ auf der Kurve Γ die Funktion $a(x)\nu^T \nabla u(x)$ stetig ist.
Bemerkung: Insbesondere ist damit $\nu^T \nabla u(x)$ auf Γ unstetig.

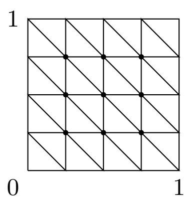
Aufgabe 4. (Finite Elemente – ein einfaches 2d-Beispiel)

Auf $\Omega := (0,1)^2$ wird die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Bedingungen betrachtet. Der Abschluss $\overline{\Omega}$ werde nun wie in Abb. (i) mit einem gleichmäßigen Netz aus Dreiecken der Maschenweite h überzogen. Als Ansatzraum wählt man

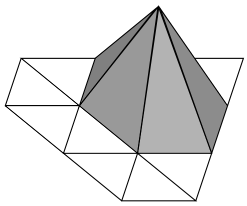
$$V_h := \big\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) \,:\, v_h \text{ ist in jedem Dreieck linear und } v_h = 0 \text{ auf } \partial\Omega \big\}.$$

a) Wie groß ist $n := \dim V_h$?

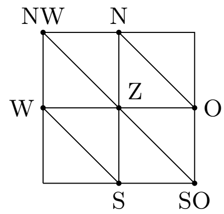
b) Ein Element $v_h \in V_h$ ist global durch die Werte an den n inneren Gitterpunkten p_j gegeben. Wähle eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ gemäß Abb. (ii) mit $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ und bestimme die Ableitungen der Basisfunktion φ_{Z} in den acht Dreiecken aus (iii).



(i) Dreiecksnetz



(ii) Basisfunktion



(iii) Nachbarpunkte von Z

c) Berechne die Matrixelemente der Steifigkeitsmatrix. Wie sieht das resultierende Gleichungssystem aus?
