Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 4 — Abgabe: 24.11.2015

Aufgabe 12 — 4 Punkte

Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Spaltenvektoren einer regulären $n \times n$ Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ an. Interpretieren Sie dieses Verfahren als $\mathbf{QR}$ - Zerlegung von $\mathbf{A}$ und geben Sie die Matrizen $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ an.

Lösung

Wir bezeichnen die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ mit $a_j = (a_{ij})_{i=1,\dots,n}$ mit $j = 1, \dots, n$. Da die Matrix $\mathbf{A}$ regulär ist, sind die Spaltenvektoren linear unabhängig und das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren folglich anwendbar und ist rekursiv gegeben durch:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_j &:= a_j - \sum_{i=1}^{j-1} (a_j \cdot v_i) v_i \\ v_j &:= \frac{v_j}{\|v_j\|} \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, n$.
Da die Vektoren v_j eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden, ist

$$\mathbf{Q} = (v_1, \dots, v_n)$$

eine orthogonale Matrix.
Weiterhin ergibt sich aus der rekursiven Formel:

$$a_j = \tilde{v}_j + \sum_{i=1}^{j-1} (a_j \cdot v_i) v_i = \|\tilde{v}_j\| v_j + \sum_{i=1}^{j-1} (a_j \cdot v_i) v_i \,.$$

Daher ergibt sich eine $\mathbf{QR}$ - Zerlegung von $\mathbf{A}$ mit

$$\begin{aligned} r_{jj} &= \|\tilde{v}_j\| \quad \forall j = 1, \dots, n \\ r_{ij} &= a_j \cdot v_i \quad \forall 1 \le i < j \le n \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 13 — 4 Punkte

Bestimmen Sie die exakte Anzahl der Multiplikationen des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens bei der Anwendung auf die Spaltenvektoren von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Lösung

Die Berechnung von $\sum_{i=1}^{j-1}(a_j \cdot v_i)v_i$ benötigt $2n(j-1)$ Multiplikationen/Divisionen, für das Normieren sind $2n$ Multiplikationen/Divisionen notwendig. Insgesamt werden also

$$\sum_{j=1}^{n} 2n(j-1) + 2n = n^2(n+1)$$

Multiplikationen benötigt.

Aufgabe 14 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit Rang $\mathbf{A} = n = \min(n,m)$ eine Matrix $\mathbf{A}^+$ existiert, so dass $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbb{1}$ gilt. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass im Allgemeinen $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \neq \mathbb{1}$ ist.

Lösung

Zuerst zeigen wir, daß

$$\operatorname{Rang}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) \tag{1}$$

gilt. Dies folgt für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ aus

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 = 0\,,$$

also sind die Kerne identisch. Aus Gründen der Dimension gilt daher (1). Setze nun

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\,.$$

Weiterhin ist für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \neq \mathbb{1}$.

Aufgabe 15 **4 Punkte**

Berechnen Sie unter Benutzung des Householder-Verfahrens die $\mathbf{QR}$-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{12} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Lösung

Schritt 1:

$$v_1 = (2,0,0,0,\sqrt{12})^T + 2(1,0,0,0,0)^T = (6,0,0,0,\sqrt{12})^T$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbb{1} - \frac{2}{48} v_1 v_1^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$v_2 = (2,6,3,0)^T + 7(1,0,0,0)^T = (9,6,3,0)^T$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbb{1} - \frac{1}{63} v_2 v_2^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} .$$

$$\mathbf{H}_2 \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -6 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3:

$$v_3 = (-6,-3,0)^T - \sqrt{45}(1,0,0)^T = (-6-3\sqrt{5},-3,0)^T$$

$$\mathbf{H}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} .$$

$$\mathbf{H}_3 \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{45} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung:

$$\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{7} & -\frac{4}{7\sqrt{5}} & -\frac{2}{7\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8\sqrt{5}}{7} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$