Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 5 — Abgabe: 1.12.2015

Aufgabe 16 — 6 Punkte

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachte für $\alpha > 0$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ folgendes Funktional:

$$T_\alpha(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \alpha\|\mathbf{x}\|_2^2 .$$

Zeigen Sie:
(i) Für jedes $\alpha > 0$ existiert eine eindeutiges $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$, so dass $T_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \leq T_\alpha(\mathbf{x})\ \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(ii) $\mathbf{x}_\alpha$ erfüllt $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha\mathbb{1}\right)\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.
(iii) Aus $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n = \min(n, m)$ folgt $\mathbf{x}_\alpha \to \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ für $\alpha \searrow 0$. Für die Definition von $\mathbf{A}^+$ siehe Aufgabe 14.

Lösung

(i) T_α ist ein konvexes Funktional, als solches ist es (unterhalb-)stetig und hat ein eindeutiges Minimum, falls es existiert. Die Existenz ergibt sich wie folgt: Betrachte eine Minimalfolge $\{\mathbf{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$. Da T_α koerziv ist, d.h. $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} T_\alpha(\mathbf{x}) \to \infty$, ist die Minimalfolge beschränkt. Aus der Kompaktheit von beschränkten Folgen in $\mathbb{R}^n$ auf abgeschlossenen Gebieten und der Unterhalbstetigkeit des Funktionals folgt sofort die Existenz.
(ii) Betrachte $f(\epsilon) = T_\alpha(\mathbf{x}_\alpha + \epsilon\mathbf{x})$ für ein beliebiges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Aufgrund von (i) nimmt f sein Minimum bei 0 an, also gilt

$$0 = f'(0) = 2\mathbf{x}^T\left(\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha\mathbb{1}\right)\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{A}^T\mathbf{b}\right) .$$

Da $\mathbf{x}$ beliebig war, folgt die Behauptung.
(iii) Es gilt wegen (ii) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ im Limes. Da $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertierbar ist (siehe Aufgabe 14), folgt (iii).

Aufgabe 17 — 4 Punkte

(i) Zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ existieren die $\mathbf{QR}$-Zerlegungen $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$. Zeigen Sie, dass eine orthogonale Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,m}$ existiert mit

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{S}^T , \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{S}\mathbf{R}_2 .$$

(ii) Zeigen Sie, dass die **QR**-Zerlegung für reguläre Matrizen eindeutig ist, sofern $r_{i,i} > 0$ ist.

Lösung

(i) Setze $\mathbf{S} := \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{Q}_2$. Dann gilt $\mathbf{S} \in O(m)$ und obige Gleichungen folgen, denn

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2 \Leftrightarrow \mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2 \Leftrightarrow \mathbf{R}_1 = \mathbf{S}\mathbf{R}_2$$

und

$$\mathbf{S}^T = (\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{Q}_2)^T = \mathbf{Q}_2^T(\mathbf{Q}_1^{-1})^T = \mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_1\,.$$

(ii) Wir nehmen an, dass $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$. Dann gilt

$$\mathbf{M} := \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2\,.$$

Weil $\mathbf{M}$ sowohl orthogonal als auch eine obere Dreiecksmatrix ist, muss die Matrix diagonal sein. Weiterhin sind alle Diagonaleinträge positiv, was aus $r_{i,i} > 0$ folgt. Daher muss $\mathbf{M} = \mathbb{1}$ sein, was die Eindeutigkeit impliziert.

Aufgabe 18 **4 Punkte**

(i) Sei $u_0(x) = a\sin(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $v(x) = b\sin(kx)$. Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) := a\cos(kct)\sin(kx) + \frac{b}{kc}\sin(kct)\sin(kx)$$

eine Lösung des Problems der Membranschwingung $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = v(x)$ ist.

(ii) Wie müssen Sie k wählen, damit zusätzlich die Randbedingungen $u(t,0) = 0 = u(t,\pi)$ erfüllt sind?

(iii) Welche Lösung ergibt sich für

$$u_0(x) = \sum_{m=1}^{M} a_m\sin(mx) \quad \text{und} \quad v(x) = \sum_{m=1}^{M} b_m\sin(mx)$$

sowie den Randbedingungen $u(t,0) = 0 = u(t,\pi)$?

Lösung

(i) Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) &= -akc\sin(kct)\sin(kx) + b\cos(kct)\sin(kx)\\
\partial_t^2 u(t,x) &= -a(kc)^2\cos(kct)\sin(kx) - bkc\sin(kct)\sin(kx)\\
\partial_x u(t,x) &= ak\cos(kct)\cos(kx) + \frac{b}{c}\sin(kct)\cos(kx)\\
\partial_x^2 u(t,x) &= -ak^2\cos(kct)\sin(kx) + \frac{bk}{c}\sin(kct)\sin(kx)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen sieht man sofort, dass $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$, $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = v(x)$ ist.
(ii) $u(t,0) = 0$ ist immer erfüllt. Weiterhin ist

$$u(t,\pi) = \left(a\cos(kct) + \frac{b}{kc}\sin(kct)\right)\sin(k\pi)\,,$$

also gilt $u(t,\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$.
(iii) Bei der Membranschwingung handelt es sich um eine lineare partielle DGL, also sind Summen von Lösungen wiederum Lösungen. Da $m \in \mathbb{N}$ ist die Bedinung aus (ii) erfüllt und damit werden für Summen von Lösungen auch die Randbedingungen wieder eingehalten. Daher ist

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{M} a_m \cos(kct) - \frac{b_m}{kc}\sin(kct)\sin(kx)\,.$$

Programmierübungen Teil 2

Abgabe bis zum 18.12.2015

Programmieraufgabe 3

Implementieren Sie die QR-Zerlegung mit Householder-Transformationen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, wobei $n \leq m$. Benutzen Sie ggf. das C++ Template auf der Homepage.

Testen Sie das Programm mit dem quadratischen Gleichungssystem aus Programmieraufgabe 1 oder 2 von Blatt 2, und der 5×3 - Matrix aus Aufgabe 15.

Programmieraufgabe 4

Die Sägeblattfunktion $z : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$z(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ \pi - t, & \pi/2 \leq t < 3\pi/2 \\ t - 2\pi, & 3\pi/2 \leq t \leq 2\pi \end{cases} .$$

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $(t_i)_{0 \leq i \leq m}$ eine äquidistante Diskretisierung von $[0, 2\pi]$, d.h. $t_i = i/m$.

(a) Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die punktsymmetrische, abgeschnittene Fourierreihe

$$z^n[x_1, \dots, x_n](t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sin(kt)$$

und lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{x_1,\dots,x_n} \sum_{i=1}^{m} \Big| z(t_i) - z^n[x_1, \dots, x_n](t_i) \Big|^2 \quad = \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \tag{1}$$

mit geeigneter Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, rechter Seite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Verwenden Sie z.B. $m = 100$ und $n = 2, 5, 10, 20$ und visualisieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Für die QR-Zerlgung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ mit $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbb{1}$ und $\mathbf{Q}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix}$ gilt

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{Q}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} - \mathbf{R}\mathbf{x} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix} \right\| = \|\mathbf{b_1} - \mathbf{R}\mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{b_2}\|_2^2 .$$

(b) Auf der Homepage finden Sie den Datensatz $(t_i, z_i)_{0 \leq i \leq 1000}$ welcher ein verrauschtes Signal darstellt (siehe Abbildung). Lösen Sie das Ausgleichsproblem (1) mit der rechten Seite $b_i = z_i$ für $n = 2, 5, 10, 20$ und visualisieren Sie das Ergebnis.