Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Grundlagen der Numerik (V2E1)

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Martin Rumpf — Alexander Effland — Behrend Heeren — Stefan Simon

Übungsblatt 7 — Abgabe: 15.12.2015

Aufgabe 22 — 6 Punkte

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ gilt:

$$\left| \int_\Omega f(x) dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)|\, dx\,.$$

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $p = 1$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f = 0$ auf $\partial\Omega$ eine Konstante C existiert (die nur von Ω abhängt), so dass gilt:

$$\left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{1}$$

(iii) Zeigen Sie (1) für $p = 2$.
Anmerkung: Alle obigen Aussagen gelten auch für Sobolev-Funktionen und sind nur Spezialfälle allgemeinerer Sätze.

Aufgabe 23 — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{N,N}$ mit:

$$\mathbf{A}_h := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte

$$\lambda_i := \frac{4}{h} \sin^2\left(\frac{i\pi h}{2}\right) \quad \text{mit} \quad h := \frac{1}{N+1}$$

besitzt. Wie lauten die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$?
Hinweis: Machen Sie den Ansatz: $\mathbf{x}_i^1 = \sin(i\pi h)$.

Aufgabe 24 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonal berandetes Gebiet. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\triangle u &= g \quad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $g \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^{<0})$. Wir betrachten ein Dreiecksgitter $\mathcal{T}$ auf Ω, wobei alle Innenwinkel kleiner gleich $\frac{\pi}{2}$ sind. Weiterhin sei $V^1(\mathcal{T})$ der Raum der stückweise affinen finiten Elemente bzgl. $\mathcal{T}$.
Beweisen Sie folgendes diskretes Maximumprinzip:
Sei $U \in V^1(\mathcal{T})$ eine diskrete Lösung obiger PDG. Dann nimmt U das Maximum auf einem Randpunkt an.