Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B21) **17. August 2016**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 61 Punkte erreicht werden.
Zum Bestehen sind mindestens 25 Punkte erforderlich.

Prüfer: Prof. Dr. Martin Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen.

Schlüsselwort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte	/6	/6	/8	/6	/7	/4
Aufgabe	7	8	9			$\sum$
Punkte	/10	/7	/7			/61

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Es sei V ein reeller Vektorraum. Definieren Sie, wann k Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ aus V eine Basis von V bilden.

(2 Punkte)

b) Gegeben sind die 3 Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Eine Menge von k Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ bildet eine Vektorraum-Basis von V falls $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind und $\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) = V$.

b) Da $\dim(\mathbb{R}^{\nVdash}) = 3$ genügt es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind. Dazu betrachtet man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann nun gelöst werden (zum Beispiel mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren), um festzustellen, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gilt. Alternativ kann auch einfach bemerkt werden, dass die Determinante der Matrix $14 \neq 0$ ist.

Aufgabe 2: a) Vervollständigen Sie die folgenden drei Eigenschaften (D1) – (D3), durch die die Determinante $\det\colon \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist.

(D1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\underline{\hspace{8cm}} = \det \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & \alpha a_j + \beta \tilde{a}_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ und $\tilde{a_j}$ die Zeilen der jeweiligen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n,n}$ bezeichnen.

(D2) ______________________________

____

____

____

(D3) ______________________________

____

____

____

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a) (D1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha \det \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & a_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & \tilde{a}_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_{j-1} & — \\ — & \alpha a_j + \beta \tilde{a}_j & — \\ — & a_{j+1} & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ und $\tilde{a}_j$ die Zeilen der jeweiligen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n,n}$ bezeichnen.

(D2) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $\operatorname{Rang}(A) < n$ gilt $\det(A) = 0$.

(D3) Für die Einheitsmatrix $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt $\det(\mathbb{1}) = 1$.

b) Für $n = 1$ und jede Spalte j gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

wobei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1),(n-1)}$ diejenige Matrix ist, die sich ergibt, wenn man die i-te Zeile und j-te Spalte der Matrix A streicht. Für $n = 1$ gilt $\det A = A$. Eine analoge Entwicklung existiert auch für die Zeilen. Wir berechnen die Determinante indem wir zuerst nach der 3-ten und dann zweimal nach der letzten Spalte entwickeln (es bestehen aber auch andere Möglichkeiten):

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 1 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1((-1) \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}) \\ &= 1 \cdot 1((-1) \cdot 1(1 \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})) = 1((-1)(3 \cdot (-3))) \\ &= 9. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: a) Geben Sie ein Kriterium zur Definition für die Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}$ an, das ohne die Verwendung von Folgen auskommt.

(2 Punkte)

b) Ist die folgende Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$ stetig ergänzbar?

$$f(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2}{\cos^2(x) - 1}$$

Tipp: Nutzen Sie die dritte binomische Formel: $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$.

(2 Punkte)

c) Gegeben ist die stückweise definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} -\sqrt{-1 - x} - 1, & \text{falls } x < -1, \\ -|x|, & \text{falls } x \in [-1, 1], \\ \cos(\pi(x - 1)), & \text{falls } x > 1\,. \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$.
2. Ist die Funktion $f(x)$ stetig? Geben Sie eine Begründung an!

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Cauchy-Kriterium zur Definition der Stetigkeit (Definition 2.14): Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in \mathbb{R}$, genau dann wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

b) Wir erhalten durch Umformung für alle $x \neq 2k\pi$

$$f(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2}{(\cos^2(x) - 1)} = \frac{(\cos(x) - 1)^2}{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)} = \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 1}.$$

Im Punkt $x_1 = 0$ gilt also

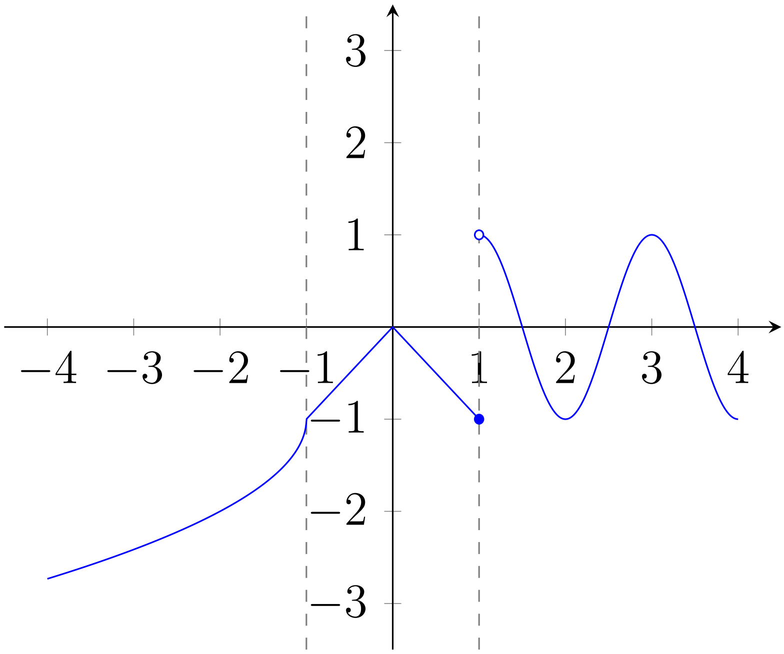
$$\lim_{x \to x_1} \cos(x) - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_1} \cos(x) + 1 = 2$$

und damit $\lim_{x \to x_1} f(x) = 0$. Also ist f in $x_1 = 0$ stetig ergänzbar durch den Wert 0. Im Punkt $x_2 = \pi$ dagegen gilt

$$\lim_{x \to x_2} \cos(x) - 1 = -2 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_2} \cos(x) + 1 = 0.$$

In der Folge gilt $\lim_{x \to x_2} f(x) = -\infty$, sodass f in x_2 nicht durch einen Wert $c \in \mathbb{R}$ stetig ergänzt werden kann.

c) 1. Skizze der Funktion f:



2. Die Funktion f ist in $x = 1$ nicht stetig. Dazu betrachte man die Grenzwerte $\lim_{x \nearrow 1} f(x)$ und $\lim_{x \searrow 1} f(x)$. Es gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} -|x| = -1$$

und

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} \cos(\pi(x-1)) = 1.$$

Also $\lim_{x \nearrow 1} f(x) \neq \lim_{x \searrow 1} f(x)$. Demnach ist f in $x = 1$ nicht stetig.

Aufgabe 4: a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 17 \\ 3 & 16 & 31 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A basierend auf dieser Zerlegung.

(2 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$A^{(1)} = \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & \\ 2 & 10 & 17 & \text{II - 2 I} \\ 3 & 16 & 31 & \text{III - 3 I} \end{array}$$

$$A^{(2)} = \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & \\ 0 & 2 & 5 & \\ 0 & 4 & 13 & \text{III - 2 II} \end{array} \qquad (L^{(1)})^{-1} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$R = A^{(3)} = \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & \\ 0 & 2 & 5 & \\ 0 & 0 & 3 & \end{array} \qquad (L^{(2)})^{-1} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Es gilt $L = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}$ und somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$\det A = \det L \det R = 1 \det R = 6.$$

Aufgabe 5: Betrachten Sie die Potenzreihen

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
$$e(x) = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^5}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n.$$

a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von $\exp(x)$ und $e(x)$ mit Hilfe der Potenzreihe. Welche Zusammenhänge stellen Sie fest?

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$e(x)\exp(2x) = 1.$$

Nutzen Sie dafür die Erkenntnisse aus Aufgabenteil a).

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Es gilt

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x),$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e(x)) &= 0 - 2 + 2(2x) - 2\left(\frac{2^2}{2!}x^2\right) + 2\left(\frac{2^3}{3!}x^3\right) - 2\left(\frac{2^4}{4!}x^4\right) + \ldots \\ &= -2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n = -2\,e(x)\end{aligned}$$

Zusammengefasst bedeutet dies:

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \exp(x), \\ e'(x) &= -2\,e(x).\end{aligned}$$

b) Zunächst definieren wir die Funktion

$$f(x) = e(x)\exp(2x).$$

Für $x = 0$ erhalten wir dann durch einsetzen in die Reihe, $f(0) = 1 \cdot 1 = 1$. Des Weiteren gilt wegen der Produkt- und Kettenregel und den Ergebnissen aus Teil a)

$$f'(x) = e'(x)\exp(2x) + 2\,e(x)\exp'(2x)$$

$$= -2\, e(x) \exp(2x) + 2\, e(x) \exp(2x) = 0.$$

Folglich ist die Funktion f konstant und es gilt

$$f(x) = e(x) \exp(2x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6: a) Seien die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n)' = & f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n \\ & + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n \\ & + \ldots \\ & + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n' \,.\end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$g(x) = (\sin(x))\,(\exp(3x))\,\left(2x^2 - 1\right) \ .$$

(2 Punkte)

LÖSUNG:

a) *Induktionsanfang:* Für $n = 2$ beschreibt

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$$

die bekannte Produktregel für das Produkt zweier Funktionen.

Induktionsschritt: Gelte die Aussage für n, dann

$$\begin{aligned}& (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n \cdot f_{n+1})' \\ & = (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n)' \cdot f_{n+1} + (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n) \cdot f_{n+1}' \\ & = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} \\ & + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} \\ & + \ldots \\ & + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n' \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n \cdot f_{n+1}' \,.\end{aligned}$$

$\square$

b)

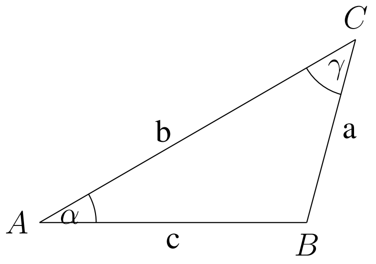
$$\begin{aligned}g'(x) = & (\cos(x))(\exp(3x))(2x^2 - 1) \\ & + (\sin(x))(3\exp(3x))(2x^2 - 1) \\ & + (\sin(x))(\exp(3x))(4x) \\ & = \cos(x)(\exp(3x))(2x^2 - 1) + \sin(x)\exp(3x)(4x + 6x^2 - 3)\end{aligned}$$

Aufgabe 7: a) Geben Sie den Sinussatz und den Kosinussatz an! (2 Punkte)

b) Gegeben sind die Länge und Winkel

$$\|a\| = 5\,, \alpha = 30^\circ\,, \gamma = 45^\circ\,.$$

Berechnen Sie $\|b\|$ und $\|c\|$.

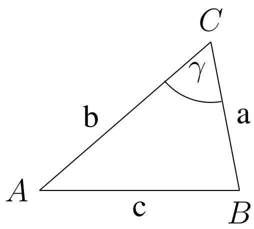


(2 Punkte)

c) Gegeben sind die Längen und der Winkel

$$a = 2\,, b = 3\,, \gamma = 60^\circ\,.$$

Berechnen Sie c.

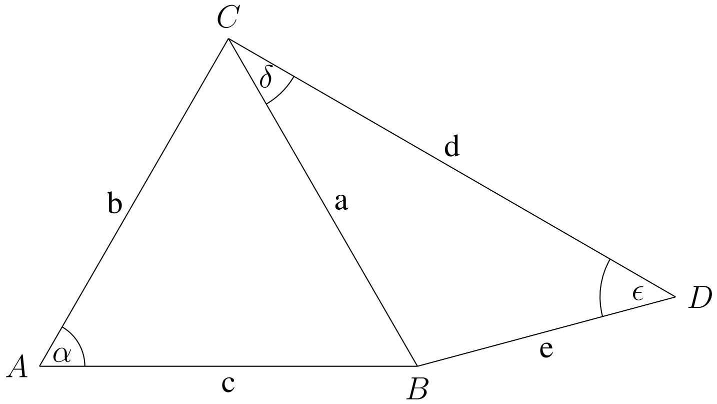


(2 Punkte)

d) Gegeben sind die Längen und Winkel

$$b = 5, \quad c = 5, \quad \alpha = 60^\circ, \quad \delta = 30^\circ, \quad \epsilon = 45^\circ\,.$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Daten a und e.



(4 Punkte)

Hinweis: Die Werte für $\sin$ und $\cos$ für einige Werte α finden Sie in der folgenden Tabelle. Sie benötigen nicht alle angegebenen Werte für die Lösung der Aufgabe!

α (in Grad)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0	0	1
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
105	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

LÖSUNG:

a) Sinussatz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Kosinussatz:

$$2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 - c^2$$

b) Mit dem Sinussatz erhält man

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$
$$\Leftrightarrow \quad 10 = \frac{b}{\sin(105°)} = \frac{c}{\sin(45°)}$$

also

$$b = \frac{5+5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad c = \frac{10}{\sqrt{2}}\,.$$

c) Der Kosinussatz liefert

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 = 4 + 9 + 12 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 = 7 \Leftrightarrow c = \sqrt{7}\,.$$

d) Mit dem Kosinussatz erhält man zunächst $a = 5$.
(*Alternativ:* Das Dreieck ABC ist ein gleichseitiges Dreieck, also ist $a = 5$.)
Anschließend erhält man mit dem Sinussatz

$$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 30°} \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt{2} = 2b\,,$$

also $b = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 8: Sei $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar.

a) Geben Sie die Definition der Ableitung am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ an. (1 Punkt)

b) Spezifizieren Sie die Einträge der Jacobi-Matrix und des Gradienten von g am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie für

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den Gradienten am Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. (2 Punkte)

d) Was sind die Niveaumengen der Funktion $f(x, y, z)$ aus Teilaufgabe c)? (1 Punkt)

LÖSUNG:

a) Die lineare Abbildung a mit $g(x) = g(x^0) + a(x - x^0) + o(x - x^0)$ heißt die Ableitung von g in x^0.

b) Die Jacobi-Matrix ist definiert durch

$$A(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g(x) & \partial_{x_2} g(x) & \ldots & \partial_{x_n} g(x) \end{pmatrix} ,$$

der Gradient durch

$$\operatorname{grad} g(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g(x) \\ \partial_{x_2} g(x) \\ \ldots \\ \partial_{x_n} g(x) \end{pmatrix} .$$

c)

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} \\ \frac{y}{b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} \\ \frac{z}{c^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

d) Es handelt sich um Ellipsoide.

Aufgabe 9: Geben Sie folgende lineare Abbildungen in Matrizenform an, d. h. finden Sie zu der angegebenen linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ eine Matrix in $\mathbb{R}^{3,3}$ so, dass die Multiplikation eines Vektors aus dem $\mathbb{R}^3$ mit dieser Matrix der Anwendung der linearen Abbildung auf den Vektor entspricht.

a) f sei die lineare Abbildung, die einen Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ um $120°$ bezüglich des Ursprungs in der y–z–Ebene dreht,

(2 Punkte)

b) g sei die lineare Abbildung, die einen Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ um $45°$ bezüglich des Ursprungs in der x–y–Ebene dreht,

(2 Punkte)

c) $h(x) = (g \circ f)(x)$.

(3 Punkte)

LÖSUNG:

a) Die Matrix F zur linearen Abbildung f ist

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix g zur linearen Abbildung g ist

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Unter Verwendung der Varianten in den Teilaufgaben a) und b) gibt es 4 mögliche Lösungen:

i) Variante 1 und Variante 1:

$$G_{(1)}F_{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ii) Variante 1 und Variante 2:

$$G_{(2)}F_{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & -\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

iii) Variante 2 und Variante 1:

$$G_{(1)}F_{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & -\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ,$$

iv) Variante 2 und Variante 2

$$G_{(2)}F_{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$