Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B21) **23. März 2016**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 64 Punkte erreicht werden.
Zum Bestehen sind mindestens 26 Punkte erforderlich.

Prüfer: Prof. Dr. Martin Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen.

Schlüsselwort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte	/8	/6	/4	/6	/7	/8
Aufgabe	7	8	9	10	$\sum$	
Punkte	/5	/6	/7	/7	/64	

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Geben Sie die Definition für die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}$ an. (2 Punkte)

b) Ist die folgende Funktion an der Stelle $x = 3$ stetig ergänzbar?

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x-3)^2}$$

(2 Punkte)

c) Gegeben ist die stückweise definierte Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x-1} + 1 & x > 1, \\ x & x \in [-1, 1], \\ -\cos(\pi(x+1)) & x < -1\,. \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$.
2. Ist die Funktion $f(x)$ stetig? Geben Sie eine Begründung an!

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $a \in \mathbb{R}$, falls für jede Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k)} \in \mathbb{R}$ und $\|x - x^{(k)}\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt $\|f(x) - f(x^{(k)})\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Wir erhalten durch Umformung

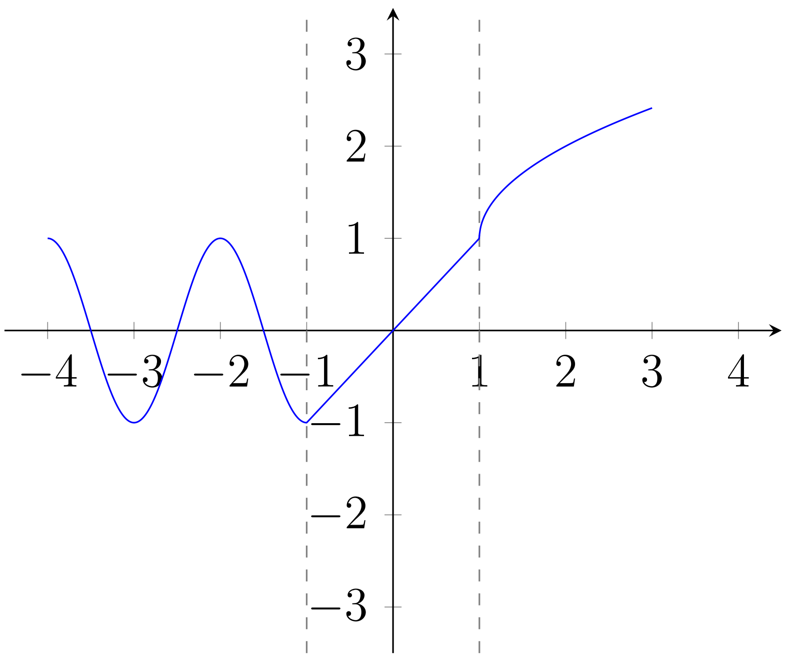
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x-3)^2} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}\,.$$

Da $\lim_{x\to 3} x - 3 = 0$ und $\lim_{x \to 3} x + 3 = 6 \neq 0$, ist

$$\lim_{x \downarrow 3} \frac{x+3}{x-3} = \infty \text{ und } \lim_{x \uparrow 3} \frac{x+3}{x-3} = -\infty$$

da $x - 3 > 0$ für $x > 3$ und $x - 3 < 0$ für $x < 3$. Die Funktion ist also im Punkt $x = 3$ nicht stetig ergänzbar.

c) 1. Skizze der Funktion f:



2. $x \mapsto \sqrt{x-1}+1$, $x \mapsto x$ und $x \mapsto \sqrt{x-1}+1$ sind stetig, also ist f an allen Punkten $x \notin \{-1, 1\}$ stetig. Es bleibt zu zeigen, dass f auch an den Punkten $x = 1$ und $x = -1$ stetig ist.

   Betrachte hierzu die folgenden Grenzwerte:

   $$\lim_{x \to -1} -\cos(\pi(x+1)) = -1 = \lim_{x \to -1} x$$

   und

   $$\lim_{x \to 1} \sqrt{x-1} + 1 = 1 = \lim_{x \to 1} x\,.$$

   Da die Grenzwerte der jeweiligen Funktionsteile an den Punkten -1 und 1 übereinstimmen, ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 2: a) Es sei V ein reeller Vektorraum. Definieren Sie, wann k Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ aus V linear abhängig sind. (2 Punkte)

b) Gegeben sind die 3 Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren linear abhängig sind. (4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Die k Vektoren aus V heißen linear abhängig, genau dann, wenn es $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, mit mindestens einem $\alpha_m \neq 0$ für $1 \leq m \leq k$ und $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$.

b) $v_2 = 4v_1 + v_3$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

LÖSUNG: Für $n > 1$ gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist, die sich ergibt, wenn man die i-te Zeile und j-te Spalte der Matrix B streicht. Für $n = 1$ gilt $\det A = A$.
Entwicklung nach der 3-ten Spalte

$$\det A = (-1)^4 \cdot 0 + (-1)^6 \cdot 0 + (-1)^4 \cdot 1 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^7 \cdot 0$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

Aufgabe 4: a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 4 & 32 & 48 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A basierend auf dieser Zerlegung.

(2 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$A^{(1)} = \begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 8 & 11 & \text{II - 2 I} \\ 4 & 32 & 48 & \text{III - 4 I} \end{array}$$

$$A^{(2)} = \begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 4 & 5 & \\ 0 & 24 & 36 & \text{III - 6 II} \end{array} \qquad (L^{(1)})^{-1} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$R = A^{(3)} = \begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \qquad (L^{(2)})^{-1} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{array}$$

Es gilt $L = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}$ und somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$\det A = \det L \det R = 1 \det R = 24\,.$$

Aufgabe 5: Betrachten Sie die Potenzreihen

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

a) Bestimmen Sie die Ableitungen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ mit Hilfe der Potenzreihen. Welchen Zusammenhang stellen Sie fest?

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Nutzen Sie dafür die gewonnen Zusammenhänge aus Aufgabenteil a).

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh(x)$$

Zusammengefasst bedeutet dies:

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$
$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

b) Zunächst definieren wir die Funktion

$$f(x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x).$$

Für $x = 0$ erhalten wir dann, durch einsetzen in die Reihe, $f(0) = 1 - 0 = 1$. Des Weiteren gilt

$$f'(x) = 2\cosh(x) \cdot \cosh'(x) - 2\sinh(x) \cdot \sinh'(x)$$

$$= 2\cosh(x) \cdot \sinh(x) - 2\sinh(x) \cdot \cosh(x) = 0.$$

Damit gilt

$$f(x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6: a) Definieren Sie für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Differenzierbarkeit in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(2 Punkte)

b) Spezifizieren Sie die Einträge der Jacobi-Matrix von g.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

für ein festes $r \in \mathbb{R}$.

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzier in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$g(x) = g(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

wobei $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $\frac{o(h)}{||h||} \to 0$ für $h \to 0$.

b) Die Jacobi-Matrix $A = Dg(x_0)$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hat die Einträge

$$A_{ij} = \frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j}$$

wobei $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.

c)

$$Df(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: a) Seien $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Geben Sie die Kettenregel für vektorwertige Funktionen an!

Notation: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ für $x \in \mathbb{R}^k$. (2 Punkte)

b) Differenzieren Sie die Funktion $f \circ g$ im Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ mit

$$f\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \frac{z}{w}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Kettenregel. (3 Punkte)

LÖSUNG:

a) $f \circ g$ ist differenzierbar und es gilt

$$D(f \circ g)(x) = (Df)(g(x))Dg(x)\,.$$

b) Es gilt

$$Df\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w} & -\frac{z}{w^2} \end{pmatrix}, \quad Dg\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}\,.$$

Mit Hilfe der Kettenregel für vektorwertige Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} D(f \circ g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Betrachten Sie die euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, wobei $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ das euklidische Skalarprodukt, für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, bezeichnet.

a) Geben Sie, unter Verwendung der unten gegebenen Skizze, die geometrische Bedeutung von $x \cdot y$ an.

(3 Punkte)

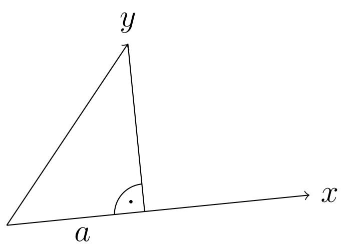
b) Zeigen Sie für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Regeln für das Skalarprodukt, dass

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(3 Punkte)

LÖSUNG:

a)



$$x \cdot y = a\|x\| = c\|y\|$$

b)

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 &= (x-y)\cdot(x-y) + (x+y)\cdot(x+y) \\
&= x\cdot(x-y) - y\cdot(x-y) + x\cdot(x+y) + y\cdot(x+y) \\
&= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y + x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y \\
&= 2(x\cdot x + y\cdot y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 9: Geben Sie folgende lineare Abbildungen in Matrizenform an, d. h. finden Sie zu der angegebenen linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ eine Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass die Multiplikation eines Vektors aus dem $\mathbb{R}^3$ mit dieser Matrix der Anwendung der linearen Abbildung auf den Vektor entspricht.

a) f sei die lineare Abbildung, die einen Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ um $45°$ bezüglich des Ursprungs in der x–z–Ebene dreht,

(2 Punkte)

b) $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ -x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$,

(2 Punkte)

c) $h(x) = (g \circ f)(x)$.

(3 Punkte)

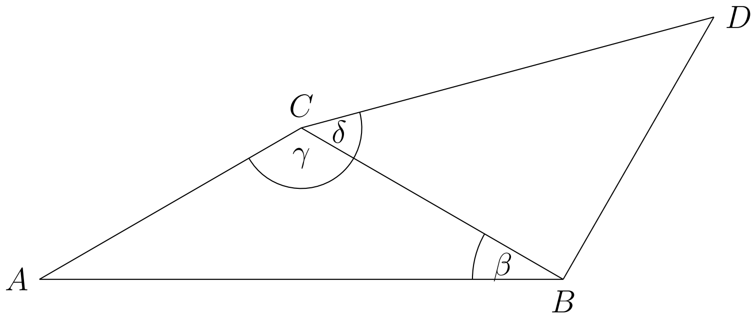
LÖSUNG:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } C = BA = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10: Gegeben sind die Längen und Winkel

$$\|C-A\| = 2, \quad \|D-C\| = 2\sqrt{2}, \quad \beta = 30°, \quad \gamma = 120°, \quad \delta = 45° .$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Daten $\|B-A\|$ und $\|D-B\|$.



Hinweis: Die Werte für $\sin$ und $\cos$ für einige Werte α finden Sie in der folgenden Tabelle. Sie benötigen nicht alle angegebenen Werte für die Lösung der Aufgabe!

α (in Grad)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0	0	1
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
120	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(7 Punkte)

LÖSUNG: Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Seiten und Winkel der Dreiecke wie in Abbildung 1.

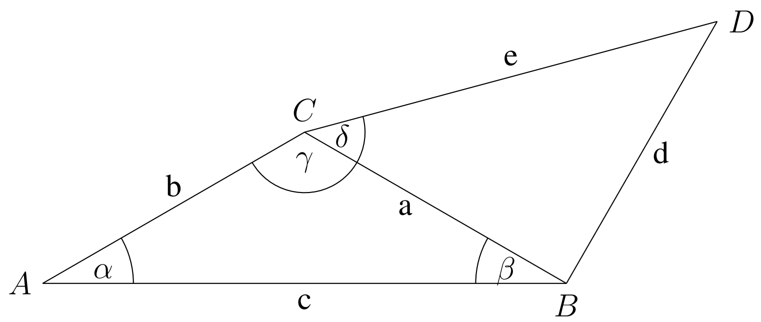


Abbildung 1: Bezeichnung der Seiten und Winkel der Dreiecke

Mit Hilfe des Sinussatzes folgern wir

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}, \text{ also } \frac{a}{\sin(30°)} = \frac{b}{\sin(30°)} = \frac{c}{\sin(120°)} .$$

Mit Hilfe der gegebenen Daten und der Wertetabelle erhalten wir $\frac{b}{\sin(30^\circ)} = \frac{2}{1/2} = 4$ und somit, dass $a = 2$ und schließlich $c = 4\sin(120^\circ) = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.
Mit Hilfe des Kosinussatzes kann nun d berechnet werden:

$$d^2 = a^2 + e^2 - 2ae\cos(\delta) = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ) = 4 + 8 - 8\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

und somit $d = \sqrt{4} = 2$.