Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **17. August 2016**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte	Note	Datum	Unterschrift
______________	_____	__________	________________________
______________	_____	__________	________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x \,.$$

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 2}} \,\mathrm{d}x \,.$$

(5 Punkte)

Lösung: a)

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^3 \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = (\frac{1}{3}e^3 - 0) - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^e \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \left[x^2(x \ln x - x)\right]_1^e - 2\int_1^e x(x \ln x - x) \,\mathrm{d}x = 1 - 2\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x + 2\int_1^e x^2 \,\mathrm{d}x$$

also

$$3\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = 1 + \frac{2}{3}(e^3 - 1) \quad \Rightarrow \quad \int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}(e^3 - 1) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} \,.$$

b) Mit Substitution $z = \cos x + 2$, d.h. $\mathrm{d}z = -\sin x \,\mathrm{d}x$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 2}} \,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{-1} \frac{1}{\sqrt{z}} \,\mathrm{d}z = 0 \,.$$

b)

Aufgabe 2:

a) Sei $z = \sqrt{3} + i \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Polarkoordinaten-Darstellung $(re^{i\varphi})$ von z. (2 Punkte)

b) Sei $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie z^3 in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten $(x + iy)$. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = -4$ in $\mathbb{C}$. Skizzieren Sie die Lage der Lösungen in der komplexen Ebene. (2 + 2 Punkte)

d) Geben Sie zwei verschiedene komplexe Zahlen $a \neq b \in \mathbb{C}$ an, für die $e^a = e^b$ gilt. (1 Punkt)

Lösung: a) $r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, also $z = 2e^{i \arcsin \frac{1}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $z^3 = 2^3 e^{3\cdot\frac{2\pi}{3}i} = 8e^{2\pi i} = 8$

c) $z^4 = -4$ hat vier Lösungen: $z^4 = -4 = 4e^{\pi i} = 4e^{3\pi i} = 4e^{5\pi i} = 4e^{7\pi i}$, also

$$z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad z = \sqrt{2}\, e^{\frac{5\pi}{4}i}, \quad z = \sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

d) $a = i\pi$ und $b = 3i\pi$, da $-1 = e^{i\pi} = e^{3i\pi}$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (3x^3 - x)\exp(-y^2)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Nullstellen von f. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte von f. (3 Punkte)

c) Klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f nach Minima, Maxima oder Sattelpunkten. (3 Punkte)

d) Zeichnen Sie die Nullstellenmenge sowie die kritischen Punkte von f. (2 Punkte)

Lösung:
a) $f(x,y) = 0$ falls $3x^3 - x = 0$, d.h. falls $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{1/3}$. Die Nullstellenmenge ist also gegeben durch drei Geraden parallel zur y-Achse bei $x = -\sqrt{1/3}$, $x = 0$ und $x = \sqrt{1/3}$.

b) Berechne

$$\nabla f(x,y) = \exp(-y^2)\begin{pmatrix} 9x^2 - 1 \\ -2y(3x^3 - x) \end{pmatrix}.$$

Aus $\nabla f(x,y) = 0$ folgt dann $9x^2 = 1$ und $y(3x^3 - x) = 0$, d.h. $x = \pm 1/3$ und $y = 0$. Mögliche kritische Punkte sind also gegeben durch $(\frac{1}{3}, 0)$ und $(-\frac{1}{3}, 0)$.

c) Berechne

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \exp(-y^2)\begin{pmatrix} 18x & -2y(9x^2-1) \\ -2y(9x^2-1) & (3x^3 - x)(4y^2 - 2) \end{pmatrix}$$

Also

$$\mathrm{Hess} f(\frac{1}{3}, 0) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \to \text{ pos. definit } \to \text{ Minimum}$$

$$\mathrm{Hess} f(-\frac{1}{3}, 0) = 1 \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \to \text{ neg. definit } \to \text{ Maximum}$$

Aufgabe 4: Lösen Sie mittels des QR-Verfahrens (und *nicht* unter Verwendung der Normalengleichung) das Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \to \min!$$

Geben Sie die Minimalstelle (x, y) und das Quadrat des Residuums (den Wert der obigen quadrierten Norm an der Minimalstelle) an.

(10 Punkte)

Lösung:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -\operatorname{sgn}(a_{11})\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = -3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{12} v_1 v_1^T$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A^{(2)}$ ist schon obere Dreiecksmatrix, daher können wir direkt einsetzen:

$$A = A^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (4, -6)\,.$$

Das Quadrat des Residuums ist gegeben durch $3^2 = 9$.

Aufgabe 5: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkte und offene Menge und deren Rand $\partial\Omega$ durch eine glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert, $N : \partial\Omega \to S^2$ die äußere Normale und $F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Geben Sie den Satz von Gauss an. (2 Punkte)

b) Geben Sie an, wie man mit Hilfe das Satzes von Gauss die Fläche von Ω durch ein Integral über die Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ berechnet.
Geben Sie dazu eine geeignete Funktion F an. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Fläche Ω, die durch die Kurve $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

berandet ist mit Hilfe der Methode aus Teil b). (4 Punkte)

Lösung:
a)

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F \cdot N \, \mathrm{d}a \,.$$

b) Mit $\operatorname{div} F = 1$ gilt

$$\operatorname{vol}_2(\Omega) = \int_\Omega 1 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div} F \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F \cdot N \, \mathrm{d}a = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot N(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

wobei das äußere Normalenfeld entlang der Kurve gegeben ist durch

$$N(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} N_1(\gamma(t)) \\ N_2(\gamma(t)) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} .$$

Wähle dazu $F(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder $F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

c) Für das angegebene γ gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Für $F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ gilt $\operatorname{div} F = 1$, also gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_2(\Omega) &= -\int_a^b \gamma_2(t) \cdot N_2(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma_2(t) \cdot (-\gamma_1'(t)) \, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos(t) \, \mathrm{d}t = [\frac{1}{3} \sin^3(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Sei

$$f(x_1, x_2) = x_2 \ln(x_1 + 1)\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f. (2+2 Punkte)

b) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung 2-ter Ordnung (d.h. mit Restglied 3-ter Ordnung) von f um dem Punkt $x \in \mathbb{R}$ an.

(3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) der Funktion f aus Teil a) um den Punkt $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

(3 Punkte)

Lösung: a)

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{x_1+1} \\ \ln(x_1 + 1) \end{pmatrix},$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1x_1} f & \partial^2_{x_1x_2} f \\ \partial^2_{x_2x_1} f & \partial^2_{x_2x_2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{(x_1+1)^2} & \frac{1}{x_1+1} \\ \frac{1}{x_1+1} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 3-mal stetig differenzierbar, dann gilt

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \le 2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + O(\|\xi\|^3)\,.$$

bzw, alternativ

$$f(x + \xi) = f(x) + \nabla f(x) \cdot \xi + \frac{1}{2} D^2 f(x) \xi \cdot \xi + O(\|\xi\|^3)\,.$$

c) Nach a) gilt

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$f(\xi) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3) = \xi_1 \xi_2 + O(\|\xi\|^3)\,.$$

Aufgabe 7: a) Lösen Sie die das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{3}{2}\sqrt{t} \cdot y(t) + \exp(t^{\frac{3}{2}})\,, \\ y(0) &= 2\,. \end{aligned}$$

(6 Punkte)

b) Berechnen Sie drei Schritte des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens mit Schrittweite $\tau = \frac{1}{2}$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= t\, y(t) - t + 1, \\ y(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Lösung: a) Variation der Konstanten:

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)\,.$$

Homogene Lösung von $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ mit $x(0) = 1$:

$$x(t) = x(0) \cdot \exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right) = 1 \cdot \exp\left(\int_0^t \frac{3}{2}\sqrt{s}\,\mathrm{d}s\right) = \exp(t^{\frac{3}{2}})$$

Ansatz: $y(t) = w(t) \cdot x(t)$ mit

$$w(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{x(s)}\,\mathrm{d}s + y(0) = \int_0^t 1\,\mathrm{d}s + 2 = t + 2\,.$$

Also

$$y(t) = (t + 2)\exp(t^{\frac{3}{2}})\,.$$

b)

$$\begin{aligned} x(\tfrac{1}{2}) &= x(0) + \tau\dot{x}(0) = 1 + \frac{1}{2}(0 \cdot 1 - 0 + 1) = \frac{3}{2} \\ x(1) &= x(\tfrac{1}{2}) + \tau\dot{x}(\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1) = \frac{17}{8} \\ x(\tfrac{3}{2}) &= x(1) + \tau\dot{x}(1) = \frac{17}{8} + \frac{1}{2}(1 \cdot \frac{17}{8} - 1 + 1) = \frac{51}{16} \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-x-y-2xy = 0\} \quad \text{und der Punkt } p = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)^T,$$

gesucht ist der Punkt $(x,y) \in M$, dessen Abstand von p minimal ist.

a) Begründen Sie, warum man anstelle des Abstandes den quadrierten Abstand betrachten kann. (1 Punkt)

b) Finden Sie alle kritischen Punkte des quadrierten Abstands $||(x,y)-p||^2$ unter der Nebenbedingung $(x,y) \in M$. (7 Punkte)

c) Bei welchem Punkt bzw. welchen Punkten handelt es sich um die globale Minimalstelle? Was ist der minimale Abstand? (2 Punkte)

Lösung:
a) Monotonie der Funktion $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

b) Definiere

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x-3/4)^2 + (y-3/4)^2, \\ g(x,y) &= x^2+y^2-x-y-2xy \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$ und Ableitung:

$$D_{x,y,\lambda} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x-3/4) + \lambda\,(2x-1-2y) \\ 2(y-3/4) + \lambda\,(2y-1-2x) \\ x^2+y^2-x-y-2xy \end{pmatrix}$$

D.h. $D_{x,y,\lambda} L = 0$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0 = 2(x-3/4) + \lambda\,(2x-1-2y) = 2x - 3/2 + 2\lambda x - \lambda - 2\lambda y \\ (2) \quad & 0 = 2(y-3/4) + \lambda\,(2y-1-2x) = 2y - 3/2 + 2\lambda y - \lambda - 2\lambda x \\ (1)-(2) \quad & 0 = 2(x-y) + 2\lambda(x-y) + 2\lambda(x-y) = (x-y)\,(2+4\lambda) \\ (3) \quad & 0 = x^2+y^2-x-y-2xy \end{aligned}$$

Aus $(1)-(2) = 0$ folgt $x = y$ oder $\lambda = -1/2$.

Setzt man $x = y$ in (3) ein folgt $0 = x^2 + x^2 - x - x - 2x^2 = -2x$, also $x = 0$ mit $y = x = 0$.

Setzt man $\lambda = -1/2$ in (1) ein, folgt

$$0 = 2x - 3/2 - x + \frac{1}{2} + y = x + y - 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$$

Setzt man $y = 1 - x$ in (3) ein folgt:

$$0 = x^2 + 1 - 2x + x^2 - x - 1 + x - 2x + 2x^2 = 4x^2 - 4x\,,$$

d.h. $x = 0$ (mit $y = 1 - x = 1$) oder $x = 1$ (mit $y = 1 - x = 0$).
Kritische Punkte von f unter der NB dass $g = 0$ ist, lauten also $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$.

c) Überprüfe Funktionswerte an den kritischen Punkten:

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (0, 0)\,, \quad &\to f(0, 0) = 2(3/4)^2 = \frac{9}{8} \\
(x, y) &= (0, 1)\,, \quad &\to f(0, 1) = (3/4)^2 + (1/4)^2 = \frac{10}{16} \\
(x, y) &= (1, 0)\,, \quad &\to f(1, 0) = (1/4)^2 + (3/4)^2 = \frac{10}{16}
\end{aligned}$$

Bei den beiden Punkten $(1, 0)$ und $(0, 1)$ handelt es sich um globale Minimalstellen, da $f(x, y) \to \infty$ falls $\|(x, y)\| \to \infty$. Der minimale Abstand von p zu M beträgt $\sqrt{10/16}$.

Aufgabe 9: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t + t^{-1} \\ t - t^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in [\tfrac{1}{2}, 2].$$

a) Berechnen Sie $\dot{\gamma}$ und $\ddot{\gamma}$. (2 Punkte)

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Krümmung eine ebenen Kurve (mit Vorzeichen) an. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve γ (mit Vorzeichen). (4 Punkte)

d) Geben Sie eine Kurve mit Krümmung Null an. (2 Punkte)

Lösung:
a) Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t^{-2} \\ 1 + t^{-2} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1(t) \\ \ddot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^{-3} \\ -2t^{-3} \end{pmatrix}$$

b) Für eine zweimal differenzierbare Kurve $x : [a, b] \to R^2$ mit $\dot{x}(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$ gilt

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \ddot{x}_2(t)\dot{x}_1(t)}{\|\dot{x}(t)\|^3}$$

für alle $t \in (a, b)$.

c) Nach a) gilt $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{(1 - t^{-2})^2 + (1 + t^{-2})^2} = \sqrt{2 + 2t^{-4}}$, also nach b)

$$\kappa(t) = \frac{2t^{-3} \cdot (1 - t^{-2}) + 2t^{-3} \cdot (1 + t^{-2})}{(2 + 2t^{-4})^{\frac{3}{2}}} == \frac{\sqrt{2}}{t^3(1 + t^{-4})^{\frac{3}{2}}}$$

d) Jede gerade Kurve γ, d.h. $\ddot{\gamma} = 0$, also z.B.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10: Betrachte die durch

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} v + 2\sin u + 2\cos u \\ 2v + \sin u - 2\cos u \\ 2v - 2\sin u + \cos u \end{pmatrix}, \quad , v \in [0,H], u \in [0,2\pi]$$

parametrisierte Fläche $\mathcal{M}$.

a) Berechnen Sie die Metrik.

(5 Punkte)

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von $\mathcal{M}$ an.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{M}$.

(3 Punkte)

Lösung:

a)

$$Dx(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cos u - 2\sin u & 1 \\ \cos u + 2\sin u & 2 \\ -2\cos u - \sin u & 2 \end{pmatrix}, \quad G(u,v) = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

da füer $G = (G_{ij})_{ij}$ gilt

$$\begin{aligned} G_{11} &= 4(\cos u - \sin u)^2 + (\cos u + 2\sin)^2 + (2\cos u + \sin u)^2 \\ &= 4\cos^2 u - 8\cos u \sin u + 4\sin^2 u + \cos^2 u + 4\cos u \sin u + 4\sin^2 u \\ &\quad + 4\cos^2 u + 4\cos u \sin u + \sin^2 \\ &= (4+4+1)(\cos^2 u + \sin^2 u) = 9 \\ G_{22} &= 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9 \\ G_{12} = G_{21} &= 2\cos u - 2\sin u + s\cos u + 4\sin u - 4\cos u - 2\sin u = 0 \end{aligned}$$

b) Sei $\Omega = \{(u,v) \,:\, u \in [0,2\pi), v \in [0,H]\}$, also $\mathcal{M} = x(\Omega)$. Dann gilt

$$|\mathcal{M}| = \int_{\mathcal{M}} da = \int_{x(\Omega)} da = \int_{\Omega} |\det G(u,v)|^{1/2} \, du \, dv$$

c) Mit a) folgt $\det G(u,v) = 81$, also folgt mit b)

$$|\mathcal{M}| = \int_{\Omega} |\det G(u,v)|^{1/2} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^H 9 \, du dv = 18H\pi$$