Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **7. März 2016**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte Note Datum Unterschrift

____________ ____ ________ ____________________

____________ ____ ________ ____________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \exp(x)\sin(x)\,dx\,.$$

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x-4}{x^2-4}\,dx\,.$$

(5 Punkte)

Lösung: a)

$$\int_0^\pi \exp(x)\sin(x)\,dx = [\exp(x)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \exp(x)\cos(x)\,dx$$
$$= 0 - \Big([\exp(x)\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \exp(x)\sin(x)\,dx\Big)$$

also

$$\int_0^\pi \exp(x)\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,[\exp(x)\cos(x)]_0^\pi = \exp(\pi)$$

b)

$$\int_{-1}^1 \frac{x-4}{x^2-4}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{x-4}{(x-2)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\,[\ln|x-2|]_{-1}^1 + \frac{3}{2}\,[\ln|x+2|]_{-1}^1 = -\frac{1}{2}\,(\ln 1 - \ln 3) - \frac{3}{2}\,(\ln 1 - \ln 3) = 2\ln 3$$

b)

Aufgabe 2: a) Geben Sie für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ den Ausdruck für z^{-1} an. Berechnen und skizzieren Sie dies konkret für $z = 1 + i$. (3 Punkte)

b) Geben Sie für eine komplexe Zahl $z = re^{i\theta}$ mit $r, \theta \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ den Ausdruck für z^{-1} (in Polarkoordinaten) an. Berechnen und skizzieren Sie dies konkret für $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. (3 Punkte)

c) Geben Sie i, i^2, i^3, i^4 sowie i^0 und i^{-1} in Polarkoordinaten an und skizzieren Sie diese. (4 Punkte)

Lösung: a)

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{a+ib} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \\ (1+i)^{-1} &= \frac{1}{2}(1-i) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{r}e^{-i\theta} \\ \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

c) In Polarkoordinaten ist $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, also

$$i^2 = e^{2\frac{\pi}{2}i} = e^{\pi i}, \quad i^3 = e^{3\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad i^4 = e^{4\frac{\pi}{2}i} = e^{2\pi i} = e^{0i} = 1$$

Ferner $i^0 = 1$ und nach b) $i^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = x\,y\,(x+y-3)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Nullstellen von f. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte von f. (3 Punkte)

c) Klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f nach Minima, Maxima oder Sattelpunkten. (3 Punkte)

d) Zeichnen Sie die Nullstellenmenge sowie die kritischen Punkte von f und kennzeichnen Sie die Gebiete, wo f ein positives Vorzeichen hat. (2 Punkte)

Lösung:
a) $f(x,y) = x\,y\,(x+y-3) = 0$ falls $x = 0$ oder falls $y = 0$ oder falls $y = 3 - x$.

b) Berechne

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y(x+y-3) + xy \\ x(x+y-3) + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(y+2x-3) \\ x(x+2y-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 2xy - 3y \\ x^2 + 2xy - 3x \end{pmatrix}$$

Dann folgt aus $\nabla f(x,y) = 0$:

- $x = 0$ und $y = 0$
- $x = 0$ und $y \neq 0$, d.h. $0 = y + 2x - 3 = y - 3$, also $y = 3$
- $y = 0$ und $x \neq 0$, d.h. $0 = x + 2y - 3 = x - 3$, also $x = 3$
- $y \neq 0$ und $x \neq 0$, d.h. $0 = y + 2x - 3 = y - 3$ und $0 = x + 2y - 3 = x - 3$, also $x = 1$ und $y = 1$

c) Berechne

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2y + 2x - 3 \\ 2y + 2x - 3 & 2x \end{pmatrix}$$

Also

$$\mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \to \text{ indefinit } \to \text{ Sattelpunkt}$$

$$\mathrm{Hess} f(0,3) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to \text{ indefinit } \to \text{ Sattelpunkt}$$

$$\mathrm{Hess} f(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \to \text{ indefinit } \to \text{ Sattelpunkt}$$

$$\mathrm{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \text{ pos. definit } \to \text{ Minimum}$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie den ersten Schritt der QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -6 & -6 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

d.h. die Matrizen $Q^{(1)}$ und $A^{(2)} = Q^{(1)}A$.
Dabei müssen die Einträge von $Q^{(1)}$ nicht explizit ausgerechnet werden.

Lösung:
Sei $A = (a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3)$. Gesucht ist eine Matrix $Q^{(1)} \in \mathbb{R}^{3.3}$ mit $Q^{(1)}a_1 = \alpha_1 e_1$, wobei $Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}$ eine Spiegelung an der Ebene $\{x \cdot v_1 = 0\}$ darstellt. Dazu muss v_1 im Span von $a_1 - \alpha_1 e_1$ liegen, o.B.d.A. $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1$.

Da $Q^{(1)}$ orthogonal, gilt $|\alpha_1| = \|\alpha_1 e_1\| = \|Qa_1\| = \|a_1\| = 7$, laut Skript ist $\alpha_1 = -\operatorname{sgn}(A_{11})|\alpha_1| = -7$ eine stabile Wahl.

Es folgt also $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1 = (9, 6, 3)^T$ und somit $v_1^T v_1 = 126 = 2 \cdot 63$. Dann berechnet sich die Matrix $Q^{(1)}A = (a_1^{(1)} \,|\, a_2^{(1)} \,|\, a_3^{(1)})$ wie folgt

$$a_1^{(1)} = a_1 - 2\frac{a_1^T v_1}{126} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\frac{63}{2 \cdot 63} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2^{(1)} = a_3 - 2\frac{a_2^T v_1}{126} v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{-63}{2 \cdot 63} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a_3^{(1)} = a_4 - 2\frac{a_3^T v_1}{126} v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} - 2\frac{0}{2 \cdot 63} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Also

$$Q^{(1)}A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} := (a_1^{(1)} \,|\, a_2^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: a) Geben Sie den Transformationssatz für die Integration in Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ (einschließlich der konkreten Transformation) an.

(3 Punkte)

b) Betrachten Sie die Menge

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ |z| \leq 1\}.$$

Um welche geometrische Figur handelt es sich? (3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Masse von H (mit konstanter Dichte $\rho = 1$). (4 Punkte)

Lösung:
a) Transformation:

$$g(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \quad Dg(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da $|\det Dg(r, \phi, z)| = r$ folgt für $\Omega = \{(r, \phi, z) : 0 < r < R,\ \alpha \leq \phi < \beta, a < z < b\}$

$$\int_{g(\Omega)} f(x)\, dx = \int_\Omega f(g(r, \phi, z))|\det Dg(r, \phi, z)|\, dx = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_0^R f(g(r, \phi, z))\, r\, dr\, d\phi\, dz\,.$$

c) Für $\Omega = \{(r, \phi, z) : 0 < r < 1,\ 0 \leq \phi < \pi, -1 < z < 1\}$ gilt $g(\Omega) = H$. Daher folgt:

$$vol(H) = \int_H \rho(x)\, dx = \int_{-1}^1 \int_0^\pi \int_0^1 r\, dr\, d\phi\, dz\ = \pi$$

Aufgabe 6: Sei

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt\,.$$

a) Berechnen Sie g', g'' und g'''. (2+1+1 Punkte)
(*Hinweis:* Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

b) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung k-ter Ordnung (d.h. mit Restglied $k+1$-ter Ordnung) von f um dem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.
(3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung dritter Ordnung (d.h. mit Restglied vierter Ordnung) der Funktion g aus Teil a) um den Punkt $x_0 = 0$.
(3 Punkte)

Lösung: a)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x^2) \\ g''(x) &= -2x\,\sin(x^2) \\ g'''(x) &= -2\,\sin(x^2) - 4x^2\,\cos(x^2) \end{aligned}$$

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i + \mathrm{O}(|x-x_0|^{k+1})$.

c) Mit a) wissen wir $g'(0) = 1$, $g''(0) = g'''(0) = 0$, also

$$g(x) = 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot x^3 + \mathrm{O}(|x|^4) = x + \mathrm{O}(|x|^4)$$

Aufgabe 7: Lösen Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangsdaten

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) Sei A die Matrix in der DGL. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung eines solchen Differentialgleichungssystem gegeben ist durch

$$y(t) = \exp(A(t-t_0))\, y(t_0) = \exp(At)\, y(0).$$

Um $\exp(At)$ zu berechnen, müssen wir die Matrix A diagonalisieren.

Berechnung der Eigenwerte von A:

$$0 = \det(A - \lambda \mathrm{id}) = (\lambda^2 + 1)^2 + 1$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = -1 + i$:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = -1 - i$:

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \exp(At) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} t \right) \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^{-t}}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \\ \frac{-i\,e^{it}+i\,e^{-it}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) \\ e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8: a) Minimieren Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. (8 Punkte)

b) Welche geometrische Figur wird durch

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x,y,z) = 0\}$$

beschrieben. (2 Punkte)
(Hinweis: Lösen Sie nach z auf.)

Lösung:
a) Lagrange-Funktion $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)$ und Ableitung:

$$D_{x,y,z,\lambda} L(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 2\,(x-1) + \lambda\, 2x \\ 2\,y + \lambda\, 2y \\ 2\,z - \lambda\, 2z \\ x^2 + y^2 - z^2 \end{pmatrix}$$

D.h. $D_{x,y,z,\lambda} L = 0$ ist äquivalent zu

$$\begin{array}{ll} (1) & 1 = (1+\lambda)x \\ (2) & 0 = (1+\lambda)y \\ (3) & 0 = (1-\lambda)z \\ (4) & 0 = x^2 + y^2 - z^2 \end{array}$$

Aus $\lambda = -1$ folgt mit (1) ein Widerspruch.

Aus $\lambda = 1$ folgt mit (2) dann $y = 0$ und mit (1) $x = \frac{1}{2}$, also mit (4) dann $z = \pm\frac{1}{2}$.

Für $\lambda \notin \{-1, 1\}$ folgt mit (2) und (3) $y = z = 0$, also mit (4) dann $x = 0$, was ein Widerspruch zu (1) ist.

Da $f(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, sind $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ und $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ Minima.
b) Kegel

Aufgabe 9: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ \sin(t)\,\cos(t) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

(4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Krümmung von γ konstant ist.

(4 Punkte)

c) Um welche Kurve handelt es sich?

(2 Punkte)

Lösung:
a) Es gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\|^2 &= 4\cos^2(t)\sin^2(t) + \cos^4(t) + \sin^4(t) - 2\cos^2(t)\sin^2(t) \\ &= (\cos^2(t) + \sin^2(t))^2 = 1\end{aligned}$$

b) Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$\begin{aligned}\kappa(t) = \|\ddot\gamma(t)\| &= \left\| \begin{pmatrix} -2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) \\ -4\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{4\cos^4(t) + 4\sin^4(t) - 8\cos^2(t)\sin^2(t) + 16\cos^2(t)\sin^2(t)} \\ &= 2\sqrt{\cos^4(t) + \sin^4(t) + 2\cos^2(t)\sin^2(t)} \\ &= 2\sqrt{(\cos^2(t) + \sin^2(t))^2} = 2\end{aligned}$$

c) Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und Radius $\frac{1}{2}$

Aufgabe 10: Die Sphäre sei parametrisiert durch

$$x(\phi, z) = \begin{pmatrix} \cos\phi\,\sqrt{1-z^2} \\ \sin\phi\,\sqrt{1-z^2} \\ z \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi)\,, \quad z \in (-1, 1)\,.$$

a) Berechnen Sie $\|x(\phi, z)\|$.

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Metrik.

(5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Oberfläche der Sphäre mit Hilfe dieser Parametrisierung.

(3 Punkte)

Lösung:
a)

$$\|x(\phi, z)\|^2 = \cos^2\phi\,(1-z^2) + \sin^2\phi\,(1-z^2) + z^2 = (\cos^2\phi + \sin^2\phi)(1-z^2) + z^2 = 1$$

b)

$$Dx(\phi, z) = \begin{pmatrix} -\sin\phi\,\sqrt{1-z^2} & \cos\phi\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} \\ \cos\phi\,\sqrt{1-z^2} & \sin\phi\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G(\phi, z) = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 1-z^2 & 0 \\ 0 & \frac{z^2}{1-z^2} + 1 \end{pmatrix}$$

c) Mit b) $\det G(\phi, z) = 1$. Sei $\Omega = \{(\phi, z) \,:\, \phi \in [0, 2\pi)\,, z \in (-1, 1)\}$, dann

$$A = \int_\Omega |\det G(\phi, z)|^{1/2}\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} dz d\phi = 4\pi$$