Anwesenheitsübungen zur Ingenieur-Mathematik III **WS 2015/2016**
Blatt 7 **15.01.2016**

Aufgabe 11: Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) := (y^3 - y) \cdot (e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie lokale Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung:

a) Kritische Punkte von f sind die Nullstellen des Gradienten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^3 - y)(e^x - e^{-x}) \\ (3y^2 - 1)(e^x + e^{-x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y(y^2 - 1)(e^x - e^{-x}) \\ (3y^2 - 1)(e^x + e^{-x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ und } y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Hessesche Matrix ist

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (y^3 - y)(e^x + e^{-x}) & (3y^2 - 1)(e^x - e^{-x}) \\ (3y^2 - 1)(e^x - e^{-x}) & 6y(e^x + e^{-x}) \end{pmatrix}$$

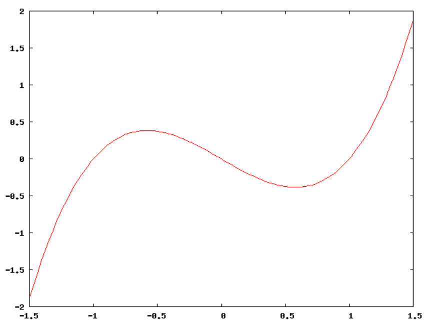
Also

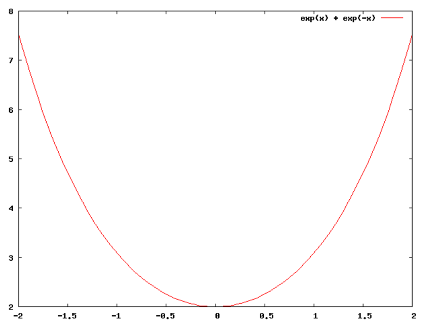
$$(x,y) = (0, +\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$(x,y) = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

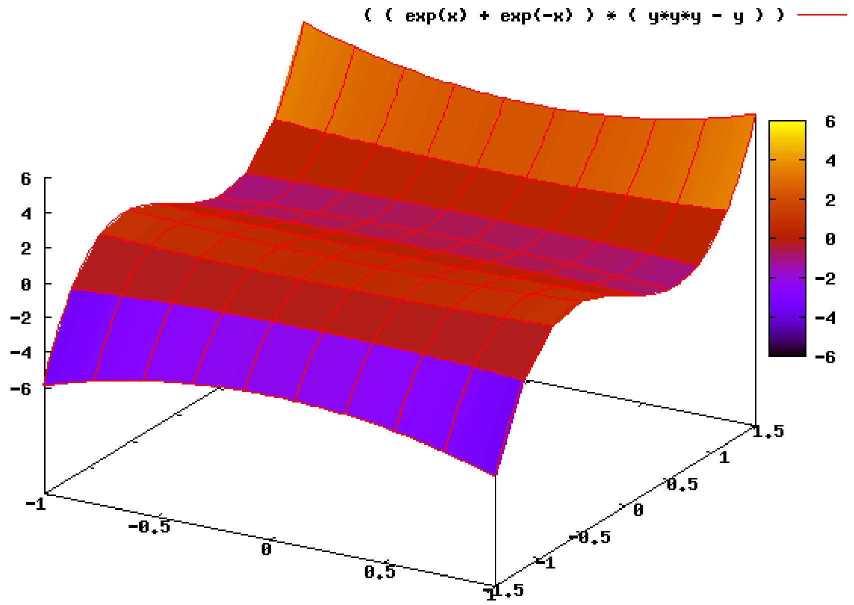
Die Hesse-Matrix ist in beiden Fällen indefinit und beide Punkte $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ sind Sattelpunkte.

b) Wir plotten zunächst die beiden Faktoren von f separat:





und nun den Graphen der gesamten Funktion:



Bemerkung: Für konstantes $y = y_0$ ist $f(x, y_0) = K(e^x + e^{-x})$.