Aufgabe 13: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Finden Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen $x_Z \in Z$, so dass der Abstand zwischen x_Z und x_0 minimal ist.

LÖSUNG: Wir müssen die Funktion

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

minimieren. Dazu bilden wir die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_x F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_y F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_y F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_\lambda F(x, y, z, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2(x - x_0) - 2\lambda x = 0 \\ 2(y - y_0) - 2\lambda y = 0 \\ 2(z - z_0) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Daraus folgt $z = z_0$,

$$x = \frac{x_0}{1 - \lambda} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{y_0}{1 - \lambda}.$$

Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{x_0^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{y_0^2}{(1-\lambda)^2} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_0^2 + y_0^2 = (1-\lambda)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda = 1 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

und damit können wir nun x und y ausrechnen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{1 - \lambda} = \frac{x_0}{\mp\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ y &= \frac{y_0}{1 - \lambda} = \frac{y_0}{\mp\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, z_0 \right) &= \frac{x_0^2(1 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{y_0^2(1 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2}{x_0^2 + y_0^2} \\ &= \left(1 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, z_0\right) &= \frac{x_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} + \frac{y_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} \\
&= \left(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow x_Z = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ z_0 \end{pmatrix}
$$