Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	∅
Note:			

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: Sei

$$x : [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h^2 \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung einer Fläche $P \subset \mathbb{R}^3$ und

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (1, t)$$

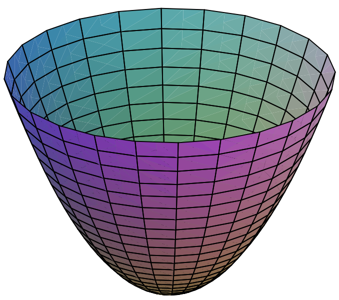
eine Kurve im Definitionsbereich von x.

a) Skizzieren Sie die Fläche P.

b) Berechnen Sie die Oberfläche von P.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $x \circ \gamma$.

Lösung:



a)

b)

$$Dx = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -h\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & h\cos(\varphi) \\ 2h & 0 \end{pmatrix}$$

Metrik:

$$g = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 1+4h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$$\det g = (1+4h^2)h^2 = h^2 + 4h^4$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_P 1 dx &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} h\sqrt{1+4h^2} d\varphi dh \\ \text{(Substitution: } z = 1+4h^2, \frac{dz}{dh} = 8h) &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} h\sqrt{1+4h^2} dh = 2\pi \int_1^9 h\sqrt{z}\frac{dz}{8h} \\ &= \frac{\pi}{4}\int_1^9 \sqrt{z} dz = \frac{13}{3}\pi \end{aligned}$$

c) Aus der Vorlesung: Bogenlänge: $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{x}(\xi)\| d\xi$, also

$$\int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Aufgabe 2: a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die Fläche eines Kreises mit Radius 2 mit Hilfe eines geeigneten Integrals über den Rand des Kreises.

LÖSUNG: Der Kreis K mit Radius 2 is gegeben als die Menge

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

d.h. der Rand ∂K ist

$$\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Parametrisierung: $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt von K ist nun

$$\text{Fläche}(K) = \int_K dx = \int_{\partial K} N \cdot f(x_1, x_2) dl \overset{\operatorname{div} \underline{f}=1}{=} \int_{\partial K} \frac{x}{\|x\|} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} dl$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial K} \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} dl \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(2\cos(\varphi))^2}{\sqrt{(2\cos(\varphi))^2 + (2\sin(\varphi))^2}} 2d\varphi \\
&= 4\int_0^{2\pi} \frac{(\cos(\varphi))^2}{2} 2d\varphi \\
&= 4\left[\frac{1}{2}(\varphi + \sin(\varphi)\cos(\varphi))\right]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$