Aufgabe 1: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k} \int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right) du$$

definierte Funktion.

a) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie das Volumen des dreidimensionalen Kegels, der durch folgende Eigenschaften gegeben ist:

- Die Spitze des Kegels liegt im Ursprung.
- Die Mittelachse des Kegels liegt auf der x-Achse.
- Der Kegel ist begrenzt durch die zur y, z-Ebene parallele Kreisebene, die ihren Mittelpunkt in $(L, 0, 0)$ und den Radius R hat.

Aufgabe 3: Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

a) den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$,

b) das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen begrenzten Körpers

$$x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 4,$$

indem Sie das Volumen als Dreifachintegral schreiben.