**Aufgabe 1:** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k} \int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right)\, du$$

definierte Funktion.

a) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Lösung:

a) Nach der Leibniz-Regel für das Ableiten von parameterabhängigen Integralen mit variablen Grenzen (siehe Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{k}\, f(t)\ \sin\left(k(t-t)\right) + \frac{1}{k} \int_0^t f(u)\ \cos\left(k(t-u)\right) k\, du \\ &= \int_0^t f(u)\ \cos\left(k(t-u)\right) du\ . \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\sin 0 = 0$ benutzt.

Wendet man die Leibniz-Regel nocheinmal an, so erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(t)\ \cos\left(k(t-t)\right) - k \int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right) du \\ &= f(t) - k^2 x(t)\ , \end{aligned}$$

wobei wir $\cos 0 = 1$ beachtet haben.

b) Offensichtlich ergibt sich aus dem vorhergehenden, daß die Funktion $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$ ist.

Die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ergeben sich ebenfalls unmittelbar (aus der Definition von $x(t)$ als Integral bzw. der berechneten Formel für $\dot{x}(t)$ als Integral und der Tatsache, daß

$$\int_a^a g(t)\, dt = 0$$

ist für jede integrierbare Funktion $g = g(t)$).

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie das Volumen des dreidimensionalen Kegels, der durch folgende Eigenschaften gegeben ist:

- Die Spitze des Kegels liegt im Ursprung.
- Die Mittelachse des Kegels liegt auf der $x$-Achse.
- Der Kegel ist begrenzt durch die zur $y, z$-Ebene parallele Kreisebene, die ihren Mittelpunkt in $(L, 0, 0)$ und den Radius $R$ hat.

LÖSUNG: Der Kegel ist gegeben durch die Menge

$$K = \{(x, y, z) \,|\, 0 \le x \le L,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$$

mit $f(x) = \frac{R}{L}x$.
Das Volumen dieses Rotationskörpers berechnet sich also wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol(K)} &= \pi \int_0^L f^2(x)\, dx \\
&= \pi \int_0^L \frac{R^2}{L^2} x^2\, dx = \pi \frac{R^2}{L^2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L \\
&= \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{L^2} L^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 L
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

a) den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$,

b) das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

LÖSUNG:

a) Der Flächeninhalt, bzw. das zweidimensionale Volumen des gegebenen Dreiecks $D$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 1 - x\, dx \\
&= x - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{2} - 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Das Volumen des gegebenen Tetraeders $T$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} 1\, dy\, dx\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} y\Big|_0^{1-x-z} dx\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} 1 - x - z\, dx\, dz \\
&= \int_0^1 x - \frac{1}{2} x^2 - zx\Big|_0^{1-z} dz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} z^2\, dz \\
&= \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

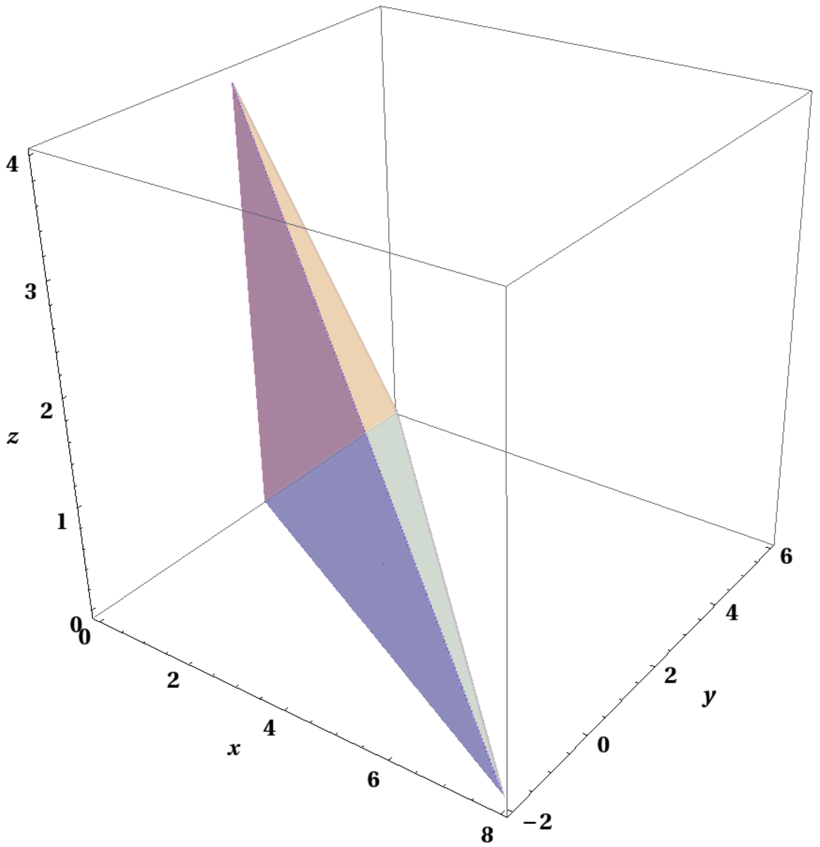
**Aufgabe 4:** Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen begrenzten Körpers

$$x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 4,$$

indem Sie das Volumen als Dreifachintegral schreiben.

LÖSUNG:
Bei den drei Flächen handelt es sich um folgende Ebenen:

- $x + y + z = 6$ ist eine Ebene, die durch die Punkte $(6, 0, 0)^T$, $(0, 6, 0)^T$ und $(0, 0, 6)^T$ aufgespannt wird.
- $z = 0$ ist die x,y-Ebene.
- $x = 0$ ist die y,z-Ebene.
- $x + 2y = 4$ ist eine zur x,y-Ebene senkrechte Ebene, die durch die Punkte $(0, 2, 0)^T$ und $(4, 0, 0)^T$ läuft.




Wir betrachten die Projektion des Körpers in die x,y-Ebene. Der Körper wird bezüglich der z-Achse von zwei Flächen begrenzt: Der $x, y$-Ebene und der Ebene $x + y + z = 6$. Wenn wir zuerst über $z$ integrieren ergeben sich daher folgende Grenzen für $z$.

$$0 \leq z \leq 6 - x - y.$$

Bezüglich der x-Achse wird der Körper von drei Ebenen begrenzt und bezüglich der y-Achse von zwei Ebenen. Daher ist es einfacher als nächstes über $y$ zu integrieren. Die begrenzenden Flächen sind die Ebenen $x + y + z = 6$ und $x + 2y = 4$, wobei die zweite Ebene die untere Grenze festlegt.

$$x + 2y = 4 \iff y = 2 - \frac{x}{2} \quad \ldots \text{ untere Grenze}$$

$$x + y + z = 6 \iff y = 6 - x - z$$
$$\implies 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 6 - x, \text{ da maximales } y \text{ bei } z = 0$$

Nun fehlen noch die Grenzen für $x$. Die untere Grenze für $x$ ist die y,z-Ebene und die obere Grenze ist der Schnittpunkt der Ebenen $x + y + z = 6$, $x + 2y = 4$ und $z = 0$.

$$0 \leq x \leq 8$$

Nun können wir das Volumen des Körpers berechnen.

$$\begin{aligned}
Vol_3(K) &= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \int_0^{6-x-y} 1 \; dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} 6 - x - y \; dy\, dx \\
&= \int_0^8 \left[ 6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \; dx \\
&= \int_0^8 8 - 2x + \frac{x^2}{8} \; dx \\
&= \left[ 8x - x^2 + \frac{x^3}{24} \right]_0^8 \; dx \\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$