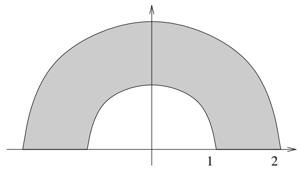
Aufgabe 5: Berechnen Sie den Schwerpunkt des halben Ringes mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 sowie konstanter Dichte 1:



LÖSUNG: Polarkoordinaten: $1 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \phi \leq \pi$
Berechnung der Masse:

$$M = \int_1^2 \int_0^\pi 1\, r\, d\phi\, dr = \pi \int_1^2 r\, dr = \frac{3}{2}\pi$$

Berechnung der y-Koordinate des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \sin\phi\, r\, d\phi\, dr \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \sin\phi\, d\phi \\ &= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (-\cos\pi - (-\cos 0)) \\ &= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 2 = \frac{28}{9\pi} \approx 0{,}99 \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes x_S offensichtlich 0, siehe auch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \cos\phi\, r\, d\phi\, dr \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \cos\phi\, d\phi \\ &= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (\sin\pi - \sin 0) \\ &= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

LÖSUNG: Angenommen die Grundfläche des Kegels liegt in der x_1, x_2-Ebene und die Spitze zeigt nach oben, d.h. in Richtung der positiven x_3-Achse. Um den Schwerpunkt $x_s = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ dieses Kegels K berechnen zu können, müssen wir als erstes seine Masse M_K berechnen. Dies geschieht mit Hilfe von Zylinderkoordinaten, wobei der

Radius in Abhängigkeit von der Höhe angegeben werden muss.

$$\begin{aligned}
M_K &= \int_K dx \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 d\varphi\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^5 \int_0^{2\pi} 1-\frac{2}{5}z+\frac{1}{25}z^2\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^5 2\pi\left(1-\frac{2}{5}z+\frac{1}{25}z^2\right) dz \\
&= \pi\left(z-\frac{1}{5}z^2+\frac{z^3}{75}\right)\Bigg|_0^5 \\
&= \pi\left(5-5+\frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir komponentenweise, unter Benutzung der Zylinderkoordinaten, den Schwerpunkt.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_1\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r\,(r\cos\varphi)\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5 \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r^2 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\right)}_{=0} dr\,dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da der Kegel achsensymmetrisch zur x_3-Achse ist, gilt

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 = 0.$$

Wir müssen also nur noch die dritte Komponente des Schwerpunktes berechnen:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_3\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{5}z} rz\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\frac{2\pi}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,dz \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 z-\frac{2}{5}z^2+\frac{z^3}{25}\,dz \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{15}z^3+\frac{z^4}{100}\right)\Big|_0^5 \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{25}{2}-\frac{50}{3}+\frac{25}{4}\right) \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes lauten also

$$x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Symmetrieachse in der Höhe $\frac{5}{4}$ über dem Boden.

Aufgabe 7: Wir betrachten ein Rohr

$$R = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z\in[0,10] \text{ und } \sqrt{x^2+y^2}\in\left[1,\frac{6}{5}\right]\right\},$$

bei dem das Wandmaterial die Dichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{z+4}{x^2+y^2}$$

hat. Berechnen Sie die Masse des Rohres

$$\int_R \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

LÖSUNG: Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und $r^2 = x^2 + y^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_R &= \int_R \rho(r(x,y,z))\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_R \frac{z+4}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_1^{\frac{6}{5}} \frac{z+4}{r^2}\,r\;dr\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^{10} z+4\,dz \;\int_0^{2\pi} d\varphi\;\int_1^{\frac{6}{5}} r^{-1}\,dr \\
&= \left[\tfrac{1}{2}z^2+4z\right]_0^{10}\;2\pi\;[\ln r]_1^{\frac{6}{5}} \\
&= (50+40)\,2\pi\;\ln\tfrac{6}{5} = 180\pi\ln\tfrac{6}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: a) Weisen Sie, unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung, nach, dass das Trägheitsmoment Θ_L einer Kugel der Masse M mit Radius R und Dichte $\rho \equiv 1$ gegeben ist durch:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,M\,R^2$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit Dichte $\rho \equiv 1$ bezüglich der z-Achse. Dabei entstehe das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse $\left\{(x,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} \le 1\right\}$ um die z-Achse.
Tipp: Verwenden Sie eine Transformation um das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden. Nutzen Sie anschließend geeignete Koordinaten zur Integration.
Es gilt $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

c) Verwenden Sie das in der Vorlesung berechnete Volumen des Rotationsellipsoids, um nachzuweisen, dass man das Trägheitsmoment eines Rotatiosellipsoids mit konstanter Dichte folgendermaßen schreiben kann:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,M\,a^2$$

LÖSUNG:

a) Nach Vorlesung ist $\Theta_L = \frac{8}{15}\pi R^5$. Das Volumen einer Kugel ist $\frac{4}{3}\pi R^3$. Wegen $\rho \equiv 1$ ist dies auch die Masse. Also gilt

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,\tfrac{4}{3}\pi R^3\,R^2 = \tfrac{2}{5}\,M\,R^2$$

b) Die Transformation $g(x,y,z) = (ax, ay, bz)$ bildet die Einheitskugel K_1 auf das gegebene Rotationsellipsoid E ab, also $g(K_1) = E$. Hierzu ist $\det Dg(x,y,z) = a^2 b$. Zur Integration über die Einheitskugel werden Kugelkoordinaten verwendet.

$$
\begin{aligned}
\Theta_L &= \int_E d_L^2(x,y)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_E x^2+y^2\,dx\,dy\,dz \\
&\quad \text{(Pythagoras: Abstand eines Punktes in der } x,y\text{-Ebene vom Ursprung)} \\
&= \int_{K_1} \big((a\bar{x})^2+(a\bar{y})^2\big)\ a^2b\ d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z} \\
&= a^4b \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r\sin\vartheta)^2\,r^2\sin\vartheta\ d\varphi\,d\vartheta\,dr \\
&\quad \text{(Abstand von der } z\text{-Achse hängt jetzt von } r \text{ und } \vartheta \text{ ab)} \\
&= a^4b \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^1 r^4\,dr\ \int_0^\pi \sin^3\vartheta\,d\vartheta \\
&= a^4b\,2\pi\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\int_0^\pi 3\sin\vartheta-\sin 3\vartheta\,d\vartheta \\
&= a^4b\,\pi\,\tfrac{1}{10}\left[-3\cos\vartheta+\tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta\right]_0^\pi d\vartheta \\
&= a^4b\,\pi\,\tfrac{1}{10}\left(3-\tfrac{1}{3}+3-\tfrac{1}{3}\right) \\
&= a^4b\,\pi\,\tfrac{1}{10}\,\tfrac{16}{3} = \tfrac{8}{15}a^4b\pi
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Im Falle der Kugel in Teil a) ist $a = b = R$ und man erhält die bereits bekannte Formel.

c) Das Volumen des Rotationsellipsoids (und wegen $\rho \equiv 1$ auch die Masse) ist $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. Zusammen mit dem obigen Ergebnis ergibt sich sofort

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,\tfrac{4}{3}\pi a^2 b\,a^2 = \tfrac{2}{5}\,M\,a^2$$