Aufgabe 13: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, 1]$ parametrisierten Kegel.
In welchem Winkel schneiden sich die "Breitenkreise"

$$b : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : \quad b(t) = x(t, h_0) \qquad \text{für festes } h_0 \in (0, 1]$$

mit den "Meridianen"

$$m : (0, 1] \to \mathbb{R}^3 : \quad m(t) = x(\phi_0, t) \qquad \text{für festes } \phi_0 \in [0, 2\pi)?$$

Tipp: Verwenden Sie die Metrik.

Aufgabe 14: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, H]$ parametrisierten Kegel.
Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels (abhängig von H).

Aufgabe 15: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch die Abbildung $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\ \cos v \\ (R + r\cos w)\ \sin v \\ r\ \sin w \end{pmatrix}$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).

a) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{S}$ (Tipp: Betrachten Sie die Kurven $h(t) = x(a, t)$ und $v(t) = x(t, a)$ für $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$).

b) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v, w) \in \mathbb{R}^{2,2}$.

c) Berechnen Sie die Normale $N(v, w) \in \mathbb{R}^3$.

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0, 1] \to \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

$$c : \xi \mapsto (\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\,\xi)$$

und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$.

d) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ.

Aufgabe 16: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix},$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).
Berechen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{S}$.