Aufgabe 13: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, 1]$ parametrisierten Kegel.
In welchem Winkel schneiden sich die "Breitenkreise"

$$b : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : \quad b(t) = x(t, h_0) \qquad \text{für festes } h_0 \in (0, 1]$$

mit den "Meridianen"

$$m : (0, 1] \to \mathbb{R}^3 : \quad m(t) = x(\phi_0, t) \qquad \text{für festes } \phi_0 \in [0, 2\pi)?$$

Tipp: Verwenden Sie die Metrik.

LÖSUNG: Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -h\sin\phi & h\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\phi & \cos\phi \\ h\cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die beiden Kurven sich im Punkt $x(\phi_0, h_0)$ schneiden und $\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ h_0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{m}(t) = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ t \end{pmatrix}$ die zugehörigen Kurven im Parameterbereich sind, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{b}(t)\Big|_{t=\phi_0} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\tilde{m}(t)\Big|_{t=h_0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\sqrt{G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\sqrt{G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die beiden Kuven auf der Hyperfläche schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 14: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, H]$ parametrisierten Kegel.
Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels (abhängig von H).

Lösung: Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -h\sin\phi & h\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\phi & \cos\phi \\ h\cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \sqrt{\det G} &= \sqrt{2}h \end{aligned}$$

Nun gilt für die Fläche

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt(Kegel)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^H \sqrt{2}h \, dh \, d\phi \\ &= 2\pi\sqrt{2}\frac{1}{2}H^2 = \sqrt{2}\pi H^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 15: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch die Abbildung $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\ \cos v \\ (R + r\cos w)\ \sin v \\ r\ \sin w \end{pmatrix}$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).

a) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{S}$ (Tipp: Betrachten Sie die Kurven $h(t) = x(a, t)$ und $v(t) = x(t, a)$ für $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$).

b) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v, w) \in \mathbb{R}^{2,2}$.

c) Berechnen Sie die Normale $N(v, w) \in \mathbb{R}^3$.

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0, 1] \to \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

$$c : \xi \mapsto (\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\,\xi)$$

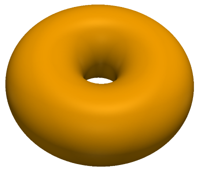
und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$.

d) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ.

Lösung:

a) Kurve $h(t)$ beschreibt jeweils einen Kreis mit Radius r:

- $a = 0$: Kreis liegt in der x-z-Ebene mit Mittelpunkt $(R, 0, 0)$.



- $a = \frac{\pi}{2}$: Kreis liegt in der y-z-Ebene mit Mittelpunkt $(0, R, 0)$.
- $a = \pi$: Kreis liegt in der x-z-Ebene mit Mittelpunkt $(-R, 0, 0)$.
- $a = \frac{3\pi}{2}$: Kreis liegt in der y-z-Ebene mit Mittelpunkt $(0, -R, 0)$.

Kurve $v(t)$ beschreibt jeweils einen Kreis in der x-y-Ebene:

- $a = 0$: Kreis hat Radius $R + r$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
- $a = \frac{\pi}{2}$: Kreis hat Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, r)$.
- $a = \pi$: Kreis hat Radius $R - r$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
- $a = \frac{3\pi}{2}$: Kreis hat Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, -r)$.

b) Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v,w) = \Big(\partial_v x \;\Big|\; \partial_w x\Big) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\,\sin v & -r\cos v\,\sin w \\ (R + r\cos w)\,\cos v & -r\sin v\,\sin w \\ 0 & r\,\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v,w)^T Dx(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

c) Die Normale ist gegeben durch

$$N(v,w) = \frac{\partial_v x \times \partial_w x}{\|\partial_v x \times \partial_w x\|}, \quad \partial_v x \times \partial_w x = \begin{pmatrix} r(R + r\cos w)\cos v\,\cos w \\ r(R + r\cos w)\sin v\,\cos w \\ r(R + r\cos w)\sin w \end{pmatrix}$$

und $\|\partial_v x \times \partial_w x\| = r(R + r\cos w)$, daher

$$N(v,w) = \begin{pmatrix} \cos v\,\cos w \\ \sin v\,\cos w \\ \sin w \end{pmatrix}.$$

d) Die Länge einer Kurve γ ist definiert als $L[\gamma] = \int_0^1 \|\dot\gamma(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi$. Es gilt

$$\gamma = x \circ c : \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ R + r\cos(2\pi\,\xi) \\ r\,\sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\,r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\,r\,\cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix},$$

oder alternativ mit Kettenregel

$$\frac{d}{d\xi}\Big(x \circ c\Big)(\xi) = Dx(c(\xi)) \cdot \dot c(\xi) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos(2\pi\xi))\,\sin\frac{\pi}{2} & -r\cos\frac{\pi}{2}\,\sin(2\pi\xi) \\ (R + r\cos(2\pi\xi))\,\cos\frac{\pi}{2} & -r\sin\frac{\pi}{2}\,\sin(2\pi\xi) \\ 0 & r\,\cos(2\pi\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\,r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\,r\,\cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\|\dot{\gamma}(\xi)\|^2 = (2\pi r)^2 \left(\sin^2(2\pi\,\xi) + \cos^2(2\pi\,\xi)\right) = (2\pi r)^2 \,.$$

Es folgt $L[\gamma] = 2\pi r$.

Aufgabe 16: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix},$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).
Berechen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{S}$.

LÖSUNG: Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v, w) = \left(\partial_v x \mid \partial_w x\right) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\,\sin v & -r\cos v\,\sin w \\ (R + r\cos w)\,\cos v & -r\sin v\,\sin w \\ 0 & r\,\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v, w)^T Dx(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\sqrt{\det G(v, w)} = r(R + r\cos w)$.

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(\mathcal{S}) &= \int_{\mathcal{S}} da = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\det G(v, w)}\,dv\,dw \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos w)\,dv\,dw \\ &= 2\pi(2\pi rR + \int_0^{2\pi} r^2\cos w\,dw) \\ &= 4\pi^2 rR. \end{aligned}$$