Aufgabe 17: a) Seien $g : [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$ Polarkordinaten im $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Fläche $g(U) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $U = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi]$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

b) Sei $x : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ die Parametrisierung einer Fläche $K \subset \mathbb{R}^3$. Skizziere Sie die Fläche K und berechnen Sie deren Oberfläche.

c) Welche geometrische Bedeutung hat es, dass die Flächen den gleichen Oberflächeninhalt haben?

Aufgabe 18: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.
Tipp:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}$$

Aufgabe 19: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

Aufgabe 20: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $r(0) = r(2\pi)$ und $r(\varphi) > 0$, d.h. es ist eine geschlossene Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn einmal um den Ursprung verläuft und zu einem Winkel φ den Abstand $r(\varphi)$ zum Ursprung hat. Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, dass die eingeschlossene Fläche gegeben ist durch

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 \, d\varphi.$$