Aufgabe 21: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Matrizen A und B orthognal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.

b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

LÖSUNG:

a) Wir wollen zeigen, dass die Matrix AB orthogonal ist, d.h. $(AB)^T = (AB)^{-1}$.

$$\begin{aligned}(AB)^T AB &= B^T A^T AB \\ &\overset{A \text{ orthogonal}}{=} B^T \mathbb{1} B \\ &= B^T B \\ &\overset{B \text{ orthogonal}}{=} \mathbb{1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (AB)^T = (AB)^{-1}$$

b) Da die Matrix A orthogonal ist folgt, dass sie auch diagonalisierbar ist.

$$\Rightarrow \quad A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$

Die Determinante von A läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned}\det A &= \det Q^{-1} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \det Q \\ &= (\det Q)^{-1} \; \lambda_1 \cdots \lambda_n \; \det Q \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Eigenwerte λ_i einer orthogonalen Matrix gilt $|\lambda_i| = 1$.

$$\Rightarrow \quad |\det A| = 1$$

Aufgabe 22: Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

LÖSUNG: Um die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A zu berechnen, berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\mathbb{1}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\cos\alpha - \lambda)(-\cos\alpha - \lambda) - \sin^2\alpha \\ &= -\cos^2\alpha + \lambda\cos\alpha - \lambda\cos\alpha + \lambda^2 - \sin^2\alpha \\ &= \lambda^2 - \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\ &= \lambda^2 - 1\end{aligned}$$

und bestimmen dessen Nullstellen

$$P_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

Die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A lauten also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Nun berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{array}{rrcl} & Ax & = & \lambda_{1,2} x \\ \Leftrightarrow & (A - \lambda_{1,2}\mathbb{1})\, x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \cos\alpha \pm 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{r} (\cos\alpha \pm 1)\, x_1 + x_2 \sin\alpha \\ x_1 \end{array} \right. & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha} x_2 \end{array} \end{array}$$

Setzt man x_1 ein, so erhält man

$$\begin{array}{rrcl} & (\cos\alpha \pm 1)\, x_1 + x_2 \sin\alpha & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (\cos\alpha \pm 1)\, \frac{\cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha} x_2 + x_2 \sin\alpha & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha} x_2 + x_2 \sin\alpha & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -x_2 \sin\alpha + x_2 \sin\alpha & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & 0 \end{array}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \left\{ \beta \begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} -\tan\frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

denn mit Hilfe der Additionstheoreme läßt sich zeigen

$$\begin{aligned} \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\ &= -\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\ &= -\tan\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \left\{ \beta \begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} \cot\frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

wobei man ebenfalls mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen kann, dass

$$\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}.$$

Aufgabe 23: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ C &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrix AB.

b) Berechnen Sie die Matrix BC.

c) Da A, B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos(-\gamma) - \sin\beta\sin(-\gamma) & -\cos\beta\sin(-\gamma) - \sin\beta\cos(-\gamma) \\ \sin\beta\cos(-\gamma) + \cos\beta\sin(-\gamma) & -\sin\beta\sin(-\gamma) + \cos\beta\cos(-\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\gamma) & -\sin(\beta-\gamma) \\ \sin(\beta-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Bei der Matrix AB handelt es sich um eine Spiegelung und bei der Matrix BC handelt es sich um eine Drehung.

Aufgabe 24: Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Eigenwerte einer Drehmatrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

b) Die Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

c) Die Eigenwerte einer beliebigen orthogonalen Matrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

d) Die Determinante einer beliebigen orthogonalen Matrix ist ± 1.
ja ☐ nein ☐

e) Jede längentreue (d.h. orthogonale) lineare Abbildung ist auch winkeltreu.
ja ☐ nein ☐

f) Jede winkeltreue lineare Abbildung ist auch längentreu.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein! In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenwerte einer Drehmatrix komplex sein können.

b) Ja! Siehe einleitendes Beispiel im Kapitel Diagonalisierung.
Alternativ: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Spiegelungsmatrix eine orthogonale Matrix ist. Zudem wissen wir, dass der Betrag der Eigenwerte einer orthogonalen Matrix jeweils 1 ist. Da die Spiegelungsmatrix zudem symmetrisch ist und nur reelle Einträge hat, kann sie nur reelle Eigenwerte haben. Somit müssen die Eigenwerte ± 1 sein.

c) Nein! Wie im Fall der Drehmatrix können die Eigenwerte auch komplex sein.

d) Ja! Siehe Vorlesung.

e) Ja! Siehe Vorlesung.

f) Nein! Die Matrix $A = 2\mathbb{1}$ ist zwar winkeltreu aber nicht längentreu.