Aufgabe 25: Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{B} = e^{t\mathbf{A}}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$. Welche Matrix erhalten Sie?

c) Zeigen Sie $\mathbf{B}^{-1} = e^{t\mathbf{A}^T} = (e^{t\mathbf{A}})^T$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}\,, \\ A^3 &= AA^2 = A\cdot(-\mathbb{1}) = -A\,, \\ A^4 &= AA^3 = A\cdot(-A) = -A^2 = \mathbb{1}\,, \\ A^5 &= AA^4 = A\cdot\mathbb{1} = A\,. \end{aligned}$$

Ab hier wiederholt sich alles!

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ A^k &= \begin{cases} A & \text{für}\quad k = 4l+1\,,\ l = 0,1,2,\dots \\ -\mathbb{1} & \text{für}\quad k = 4l+2\,,\ l = 0,1,2,\dots \\ -A & \text{für}\quad k = 4l+3\,,\ l = 0,1,2,\dots \\ \mathbb{1} & \text{für}\quad k = 4l+4\,,\ l = 0,1,2,\dots \end{cases} \\ \Rightarrow\ B &= e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!}\right)\mathbb{1} + \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}\right)A \\ &= \cos t\cdot\mathbb{1} + \sin t\cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Demnach lässt sich die Matrix A schreiben als

$$\begin{aligned} A &= C\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{At} &= C\begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Man rechnet leicht nach, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = B^T\,.$$

c) Es gilt $B^{-1} = B^T$, also ist B orthogonal.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; B^{-1} = B^T \;&=\; \left(e^{tA}\right)^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right)^T = \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^T)^k}{k!} = e^{tA^T} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 26: Es seien $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, dass für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v$ und $S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} S_n u &= u - 2\frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n = u - \frac{2u \cdot (u - v)}{\|u - v\|^2} \cdot (u - v) \\ 2u \cdot (u - v) &= 2\|u\|^2 - 2u \cdot v\,. \\ \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 - 2u \cdot v \quad \text{wegen } \|u\| = \|v\|\,. \\ \Rightarrow\; S_n u &= u - (u - v) = u - u + v = v\,. \end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$S_n v = u\,,$$

wegen $2v \cdot n = 2v \cdot (u - v) = 2uv - 2\|v\|^2$ und $\|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2uv = \|u - v\|^2$.

b)

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\; \sqrt{1^2 + (-1)^2} &= |\alpha| \\ \Leftrightarrow\; \sqrt{2} &= |\alpha| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Matrix S_{u-v} berechnen zu können, führen wir zuerst ein paar Nebenrechnungen durch:

$$u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u-v)(u-v)^T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{u-v} &= \mathbb{1} - 2\frac{(u-v)(u-v)^T}{\|u-v\|^2} \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 1-\frac{1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S_{u-v}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 27: Lösen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Sei $A = (a_1 \,|\, a_2)$. Gesucht ist eine Matrix $Q^{(1)}$ mit

$$Q^{(1)} a_1 = \alpha_1 \, e_1 \,,$$

wobei $Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}$ eine Spiegelung an der Ebene $\{x \cdot v_1 = 0\}$ darstellt.

Dazu muss v_1 im Span von $a_1 - \alpha_1 e_1$ liegen, o.B.d.A. $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1$.

Da $Q^{(1)}$ orthogonal, gilt $|\alpha_1| = \|\alpha_1 e_1\| = \|Qa_1\| = \|a_1\| = 5$, laut Skript ist $\alpha_1 = -\mathrm{sgn}(A_{11})|\alpha_1| = 5$ eine stabile Wahl.

Es folgt also $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1 = (-8, 4)^T$ und somit

$$Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung auf das LGS $Ax = b$:

$$Q^{(1)} a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} a_2 = a_2 - \frac{2(a_2 \cdot v_1)}{80} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot (-20)}{80}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(es gilt } Q^{(1)} b = b\text{, da } b \perp v_1\text{)}$$

Dann folgt

$$R = QA = Q^{(1)}A = \left(Q^{(1)}a_1 \,\middle|\, Q^{(1)}a_2\right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = Qb = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also $x_2 = 2$ und $5x_1 - 4 = 1$, d.h. $x = (1, 2)^T$.

Aufgabe 28: Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ so, daß

$$f(x, y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \right\|^2$$

minimal wird.

Berechnen Sie den Wert der Funktion f an dieser Stelle.

Lösung: Verwende das QR-Verfahren für Ausgleichsprobleme mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\alpha_1 = -\mathrm{sign}(1)\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = -\sqrt{1+4+4} = -\sqrt{9} = -3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \mathbb{1} + \frac{1}{\alpha_1 v_1 1} v_1 v_1^T = \mathbb{1} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 18 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)}A &= \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A^{(2)} \\
b^{(2)} = Q^{(1)}b &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 90 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} - \frac{15}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Schritt 2:

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= -\operatorname{sign}(3)\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = -\sqrt{9+16} = -\sqrt{25} = -5 \\
v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3-(-5) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} &= \mathbb{1} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)}\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}(0+24+16) = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)}A^{(2)} &= \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{(3)} \\
b^{(3)} = Q^{(2)}b^{(2)} &= \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}(0-120+120) = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit $f(x,y)$ minimal wird, muss (x,y)

$$
\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \end{pmatrix}
$$

lösen. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich $y = 3$ und $x = 2$.

Für das Residuum ergibt sich $f(2,3) = \|(30)\|^2 = 900$.