Aufgabe 29: Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. A ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von A, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja ☐ nein ☐

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja ☐ nein ☐

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja ☐ nein ☐

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja ☐ nein ☐

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann folgt $\lambda = 0$.
ja ☐ nein ☐

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja ☐ nein ☐

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 30: Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \operatorname{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i) u_i$.
ja ☐ nein ☐

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 31: Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x | x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von n erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

Aufgabe 32: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.