**Aufgabe 29: Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen**

Sei $A$ eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. $A$ ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von $A$, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja ☐ nein ☐

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja ☐ nein ☐

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja ☐ nein ☐

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja ☐ nein ☐

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A$ ist, dann folgt $\lambda = 0$. ja ☐ nein ☐

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja ☐ nein ☐

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten:

a) Ja, denn alle Diagonaleinträge von $A$ sind Null.

b) Nein! Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Ja. Man berechnet für eine beliebige schiefsymmetrische $3 \times 3$-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = 0 + abc + (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) - 0 - 0 - 0 = 0.$$

d) Ja. $Ax \cdot x = x \cdot A^T x = x \cdot (-A)x = -x \cdot Ax = -Ax \cdot x \Rightarrow 2Ax \cdot x = 0.$

e) Ja. $Ax \cdot x = 0$ bedeutet, dass $Ax$ stets senkrecht auf $x$ steht. Also kann $Ax$ kein Vielfaches von $x$ sein, ausser das Nullfache.

Formal: Sei $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$. Dann $0 = Ax \cdot x = \lambda x \cdot x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda = 0$.

f) Ja, siehe Vorlesung.

g) Ja. $\det(\exp(tA))$ ist stetig (differenzierbar) in $t$ und kann für beliebige $t$ nur die Werte 1 und -1 annehmen, da $\exp(tA)$ stets orthogonal ist. Da die Werte dazwischen nicht möglich sind, muss die (stetige) Funktion für alle $t$ konstant sein. Da

$$\det(\exp(0A)) = \det(\exp(0)) = \det(\mathbb{1}) = 1,$$

muss auch gelten

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(1A)) = 1.$$

**Aufgabe 30: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion**
Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)u_i$.
ja ☐ nein ☐

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten: a) Nein! Bsp. $v = e_3$, $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$, $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$ b) Ja! c) Ja! Ausmultiplizieren $u_i \cdot u_j = 0$. d) Nein! Siehe a) e) Ja! Wegen c) $v = w = u$, dann $Pv = Pw = u$.

**Aufgabe 31:** Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x | x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von $n$ erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

LÖSUNG:

a)

$$v_1 = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren $v_1$ und $v_2$ bilden eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Die Projektion des Punktes $p$ auf die Ebene berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} (p \cdot v_1)v_1 + (p \cdot v_2)v_2 &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{1}{\|\tilde{n}\|} \tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{32}} \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die Ebene lässt sich also schreiben als

$$\left\{ x \,\middle|\, x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

d)

$$\begin{aligned} p - (p \cdot n)n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Aufgabe 32:** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

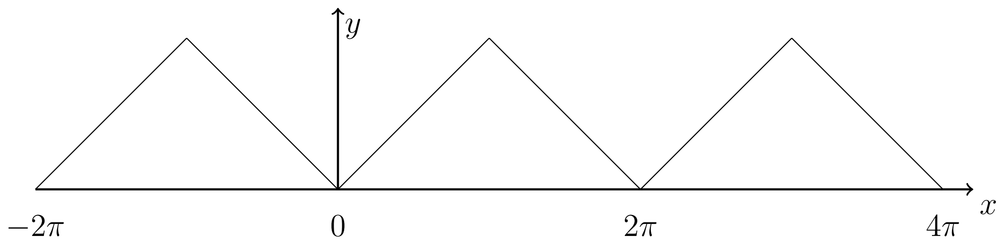
und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

LÖSUNG:

a)




b) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2 - \frac{1}{\pi} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} x^2 \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[ 2x - \frac{1}{2\pi} x^2 \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \pi^2 - 0 + \frac{2}{\pi} 2\pi - \frac{2}{\pi} \pi - \frac{1}{2\pi^2} (2\pi)^2 + \frac{1}{2\pi^2} (\pi)^2 = 1. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\cos(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} (2 - \frac{1}{k\pi}y)\cos(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{2}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \cos(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_{k\pi}^{2k\pi} y\cos(y)dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[y\sin(y) + \cos(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi} \left[\sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[y\sin(y) + \cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[ k\pi \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} - (0 \cdot \sin(0) + \underbrace{\cos(0)}_{=1}) \right] + \frac{2}{k\pi} \left[ \underbrace{\sin(2k\pi) - \sin(k\pi)}_{=0} \right] \\
& - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[ 2k\pi \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - (k\pi \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}) \right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[(-1)^k - 1\right] - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[1 - (-1)^k\right] = \frac{2}{k^2\pi^2}(-1 + (-1)^k).
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{4}{\pi^2}, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= -\frac{4}{9\pi^2}, \\
a_4 &= 0.
\end{aligned}$$

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur $y$-Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

Alternativ können wir für $k \in \mathbb{Z}$ aber auch die $b_k$ folgendermaßen berechnen

$$
\begin{aligned}
b_k =& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k}) \sin(y) dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \sin(y) dy + \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} (2 - \frac{1}{k\pi} y) \sin(y) dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \sin(y) dy + \frac{2}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \sin(y) dy - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_{k\pi}^{2k\pi} y \sin(y) dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-y\cos(y) + \sin(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi} \left[-\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-y\cos(y) + \sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[ -k\pi \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - (0 \cdot \cos(0) + \underbrace{\sin(0)}_{=0}) \right] + \frac{2}{k\pi} \left[ - \underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \right] \\
& - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[ -2k\pi \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - (-k\pi \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}) \right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-k\pi(-1)^k\right] - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-2k\pi + k\pi(-1)^k\right] + \frac{2}{k\pi} \left[-1 + (-1)^k\right] \\
=& \frac{1}{k\pi} \left[-(-1)^k + 2 - (-1)^k - 2 + 2(-1)^k\right] = 0.
\end{aligned}
$$