Aufgabe 33: Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$z(x,y) = xy \quad \text{und} \quad w(u,v) = u^2 - v^2.$$

a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien der beiden Funktionen, also einige der Mengen $N_{\{z=c\}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x,y) = xy = c = \text{const}\}$ bzw. $N_{\{w=c\}} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid w(u,v) = u^2 - v^2 = c = \text{const}\}$, zum Beispiel für $c = 1, 4, 16$.

b) Mit welchen Transformationen bildet man Niveaulinien von w auf Niveaulinen von z ab und umgekehrt?

c) Welche 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt folgende Bedingungen:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$ der Parametrisierungen

$$(x,y) \mapsto \mathbf{f}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \quad , \quad (u,v) \mapsto \mathbf{g}(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

e) Bestätigen Sie mit der Kettenregel die Beziehungen

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{A})(x,y) = D\mathbf{g}(u,v) \cdot \mathbf{A} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1})(u,v) = D\mathbf{f}(x,y) \cdot \mathbf{A}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34: Welche Aussagen sind richtig für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann ist die Hesse-Matrix $D^2 f(\mathbf{a})$ positiv definit. ja ☐ nein ☐

c) Gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ und hat $D^2 f(\mathbf{a})$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei $\mathbf{a}$ ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 35: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 36:

a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.