Aufgabe 33: Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$z(x,y) = xy \quad \text{und} \quad w(u,v) = u^2 - v^2.$$

a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien der beiden Funktionen, also einige der Mengen $N_{\{z=c\}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x,y) = xy = c = \text{const}\}$ bzw. $N_{\{w=c\}} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid w(u,v) = u^2 - v^2 = c = \text{const}\}$, zum Beispiel für $c = 1, 4, 16$.

b) Mit welchen Transformationen bildet man Niveaulinien von w auf Niveaulinen von z ab und umgekehrt?

c) Welche 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt folgende Bedingungen:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \; \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$ der Parametrisierungen

$$(x,y) \mapsto \mathbf{f}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \quad , \quad (u,v) \mapsto \mathbf{g}(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

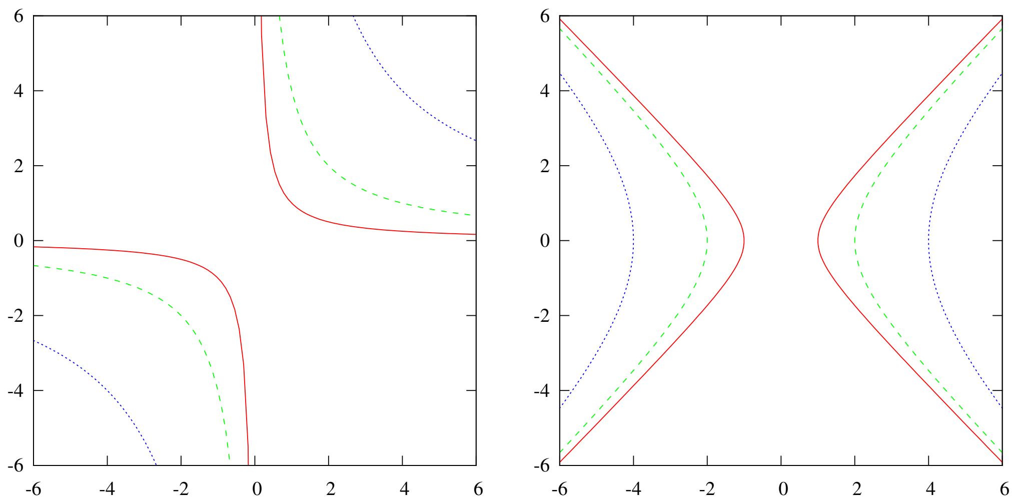
e) Bestätigen Sie mit der Kettenregel die Beziehungen

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{A})(x,y) = D\mathbf{g}(u,v) \cdot \mathbf{A} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

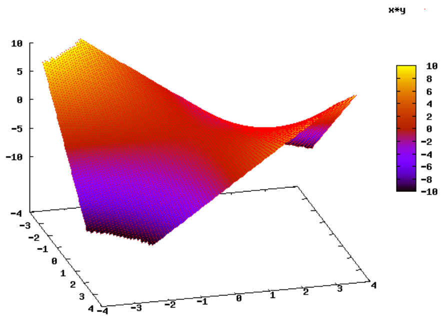
$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1})(u,v) = D\mathbf{f}(x,y) \cdot \mathbf{A}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

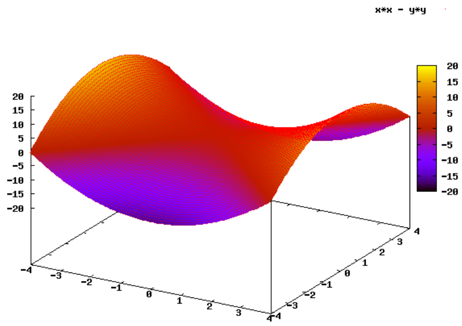
LÖSUNG:

a) $N_{\{z=c\}}$ sind Hyperbeln der Form $y = \frac{c}{x}$. $N_{\{w=c\}}$ sind Kurven der Form $v = \pm\sqrt{u^2 - c}$.



Die Graphen der beiden Funktionen sehen wie folgt aus:





b) Die Niveaulinien gehen auseinander hervor, indem man

$$\begin{aligned} x &= u - v \\ y &= u + v \\ \Rightarrow xy &= (u-v)(u+v) = u^2 - v^2 \end{aligned}$$

ausdrückt. Das entspricht

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(y+x) \\ v &= \frac{1}{2}(y-x) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und somit entspricht A einer einer Rotation um 45 Grad gefolgt von einer Skalierung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y+x \\ y-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$
$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

e)

$$\begin{aligned}
Dg(u,v)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2(u+v) & 2(u-v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ u+v & u-v \end{pmatrix},\\
(g\circ A)(x,y) = g\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+x) \\ \frac{1}{2}(y-x) \\ \frac{1}{4}(y+x)^2 - \frac{1}{4}(y-x)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+x) \\ \frac{1}{2}(y-x) \\ xy \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ D(g\circ A)(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ u+v & u-v \end{pmatrix} \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\\
Df(x,y)\cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x+y & x-y \end{pmatrix},\\
D(f\circ A^{-1})(u,v) = D\begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x+y & x-y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 34: Welche Aussagen sind richtig für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann ist die Hesse-Matrix $D^2 f(\mathbf{a})$ positiv definit. ja ☐ nein ☐

c) Gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ und hat $D^2 f(\mathbf{a})$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei $\mathbf{a}$ ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Die Antwort lautet: Ja!

Denn ein globales Minimum von f ist ein kritischer Punkt von f und ein kritischer Punkt von f ist charakterisiert durch die Bedingung $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle $\mathbf{a}$, dann ist die Hesse-Matrix $D^2 f(\mathbf{a})$ positiv definit.

Die Antwort lautet: Nein!

Im allgemeinen gilt dies nicht. Dazu folgendes Gegenbeispiel: Für die Funktion $f(x, y) := x^2$ gilt

$$
\begin{aligned}
f_x = 2x, f_y = 0, &\text{ also gilt } \nabla f(x, y) = (2x, 0), \\
f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 0, &\text{ also gilt } D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ist hier also äquivalent mit $x = 0$. Wegen

$$
f(0, y) = 0 \leq x^2 = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2
$$

hat f in allen Punkten $(0, y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ ein globales Minimum, die Hesse-Matrix $D^2 f(x, y)$ ist aber nur positiv semidefinit, da

$$
\begin{aligned}
D^2 f(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Man erkennt auch, dass

$$
D^2 f(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = 0
$$

gilt.

Ein ähnliches Gegenbeispiel liefert die Funktion $g(x, y) = x^2 + y^4$, wie man durch nachrechnen sieht!

c) Gilt $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ und hat $D^2 f(\mathbf{a})$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei $\mathbf{a}$ ein lokales Minimum.

Die Antwort lautet: Ja!

Denn wenn $D^2 f(\mathbf{a})$ nur positive Eigenwerte hat, so ist $D^2 f(\mathbf{a})$ positiv definit und die Aussage folgt aus einem Satz der Vorlesung.

Aufgabe 35: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$
f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3
$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

LÖSUNG: Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: grad $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x - 5y \ , \\ f_y(x,y) &= -5x - 4y \ . \end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \det \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0 \ .$$

$\Rightarrow$ Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

b) Zur weiteren Untersuchung des kritischen Punktes betrachtet man die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} (6-\lambda)(-4-\lambda) - 25 = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49 \ , \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 50 &\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50} \, . \end{aligned}$$

Es gilt deshalb: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2} > 0$ bzw. $\lambda_2 = 1 - \sqrt{50} = 1 - 5\sqrt{2} < 0$ und, da die Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben, liegt in $(0,0)$ ein Sattelpunkt mit dem Wert $f(0,0) = 3$ vor.

Man kann dies auch wie folgt einsehen: Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0,0)$ ist indefinit, denn es gilt ja

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

sowie

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0.$$

Also liegt ein Sattelpunkt vor, für den gilt

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 3 \ , \\ f(t,0) &= 3t^2 + 3 > 3 \ , \\ f(0,t) &= -2t^2 + 3 < 3 \ , \end{aligned}$$

wobei $t \neq 0$ sei.

Aufgabe 36: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

LÖSUNG:

a)

$$\operatorname{grad} f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -x^2 \\ \alpha x = y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -\frac{y^4}{\alpha^2} \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^4 + \alpha^3 y = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y(y^3 + \alpha^3) = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y = 0 \text{ und } x = 0) \text{ oder } (y = -\alpha \text{ und } x = \alpha)$$

$$P_0 = (0,0),\ P_1 = (\alpha, -\alpha) : D^2 f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}$$

Für $P_0 = (0,0)$ gilt $D^2 f_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(0,0)$: charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ (\lambda + 3\alpha)(\lambda - 3\alpha) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -3\alpha, \quad \lambda_2 = 3\alpha$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \neq 0$ gilt: $\quad \lambda_1\lambda_2 = -9\alpha^2 < 0$

D.h. λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen, also ist $D^2 f_\alpha(0,0)$ indefinit und $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Im Fall $\alpha = 0$ reicht die Hessematrix nicht aus, um eine Aussage machen zu können, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunk handelt. Dazu benötigt man Ableitungen höherer Ordnung.

Für $P_1 = (\alpha, -\alpha)$ gilt $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$: charakteristische Gleichung:

$$(6\alpha - \lambda)^2 - 9\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 6\alpha - \lambda = \pm\sqrt{9\alpha^2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \quad \lambda_2 = 9\alpha$$

$\Rightarrow$ $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$ ist positiv definit für $\alpha > 0$ und negativ definit für $\alpha < 0$. D.h. $(\alpha, -\alpha)$ liefert $f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \alpha^3 + \alpha^3 - 3\alpha^3 = -\alpha^3$ und ergibt ein (lokales) Minimum für $\alpha > 0$ und ein (lokales) Maximum für $\alpha < 0$. (Für $\alpha = 0$ siehe oben.)

b)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} 3x^2-3 \\ 3y^2-12 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{array} \right\} \\
\Rightarrow & P_0 = (-1,-2),\ P_1 = (-1,2),\ P_2(1,-2),\ P_3(1,2) \\
D^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

i) Für $P_0 = (-1,-2)$ gilt: $D^2 f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

$f(-1,-2) = -1 - 8 + 3 + 24 + 20 = 38 \Rightarrow$ (lokales) Maximum.

ii) Für $P_1 = (-1,2)$ gilt: $D^2 f(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist indefinit.

$f(-1,2) = -1 + 8 + 3 - 24 + 20 = 6 \Rightarrow$ Sattelpunkt.

Für $P_2 = (1,-2)$ gilt: $D^2 f(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist indefinit,

$f(1,-2) = 1 - 8 - 3 + 24 + 20 = 34$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt.

iii) Für $P_3 = (1,2)$ gilt: $D^2 f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

$f(1,2) = 1 + 8 - 3 - 24 + 20 = 2$

$\Rightarrow$ (lokales)Minimum.