

Übungen zur Analysis in mehreren Veränderlichen

Universität Bonn, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 4. Februar 2017

Blatt 14

Ausgabe: 2.2.2017

Abgabe: 9.2.2017

Dieses und die folgenden Blätter sind nicht mehr zulassungsrelevant. Dieses Blatt wird noch wie bisher korrigiert und zurückgegeben.

Aufgabe 48 (5 Punkte). Seien x_n, y_n und z_n drei Folgen im \mathbb{R}^n , und sei $a \in \mathbb{R}$. Angenommen,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot x_n = a, \quad (14.1a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{n} = 0, \quad (14.1b)$$

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (14.1c)$$

Beweisen Sie, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot y_n = a$.

Aufgabe 49 (2+2+2 Punkte). 1. Nutzen die Ungleichung $|\sin'(x)| \leq 1$, um zu beweisen, daß

$$|\sin(x)| \leq |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (14.2)$$

2. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad (14.3)$$

existiert, ist er betragslich kleiner gleich eins.

3. Stellen Sie die lineare Approximation von $\sin(x)$ in $x = 0$ auf und betrachten Sie unsere Definition der Ableitung von $\sin(x)$ in 0. Welcher Grenzwert von (14.3) lässt sich daraus ablesen?

Aufgabe 50 (5 Punkte). Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} + 7x = 2t^2, \quad x(0) = x_0 \quad (14.4)$$

durch Variation der Konstanten. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 51 (4 Punkte). Berechnen Sie mithilfe eines Doppelintegrals den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Grundseitenlänge a und Höhe h .