Übungen zur Analysis in mehreren Veränderlichen

Universität Bonn, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 1. Dezember 2016

Blatt 7

Ausgabe: 1.12.2016
Abgabe: 8.12.2016

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** *Angenomen,* $f : (x, z, w) \mapsto \mathbb{R}$ *gehört zu* $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$*. Zeigen Sie, daß*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial w} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial w \partial x}. \tag{7.1}$$

Aufgabe 21 (1+2+2+1 Punkte)**.** *Es sei*

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{7.2}$$

1. *Berechnen Sie* $\partial f / \partial x$ *und* $\partial f / \partial y$*, falls* $(x, y) \neq (0, 0)$ *ist.*
2. *Zeigen Sie für die Richtungsableitungen* ∂_x *und* ∂_y *im Ursprung:*
$$(\partial f / \partial x)(0, 0) = (\partial f / \partial y)(0, 0). \tag{7.3}$$
3. *Zeigen Sie weiterhin:* $(\partial^2 f / \partial x \partial y)(0, 0) = 1, (\partial^2 f / \partial y \partial x)(0, 0) = -1.$
4. *Was bedeutet das für die Differenzierbarkeit von* f *im Ursprung?*

Aufgabe 22 (3+3 Punkte)**.** *Lokalisieren Sie die kritischen Punkte der gegebenen Funktionen. Stellen Sie fest, ob sich sich dort Maxima, Minima oder weder das eine noch das andere befinden. Welche Extrema sind strikt? Welche lokal/global?*

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy.$
2. $g(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4.$

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** *Zeigen Sie, daß die Oberfläche eines 3D-Quaders mit festem Rauminhalt dann am kleinsten ist, wenn der Quader ein Würfel ist.*