A Review of Unified A Posteriori Finite Element Error Control (Teil 3)(David Knapp)

1. Gemischte Formulierungen

1.1 Poissonproblem: Für $f \in L^2(\Omega)$ finde ein Tupel (p,u) $\in$ Q $\times$ V := $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega)$, so dass ∇u = p und -div p = f.

1.2 Stokesproblem: Für $f \in L^2(\Omega)$ finde ein Tupel (p,u) $\in Q \times V := L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \\ \text{div u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \text{u} &= 0 && \text{in } \partial\Omega \end{aligned}$$

Bei einer vektorwertigen Funktion u kann die Symmetrie von $\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n}_{sym})$ genutzt werden. Dies führt zur symmetrischen Formulierung mit Viskositätsparameter μ:

$$\begin{aligned} \text{div}\mu\varepsilon(u) + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \\ \text{div u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \text{u} &= 0 && \text{in } \partial\Omega \end{aligned}$$

Die Stokesgleichung beschreibt den stationären Fluss inkompressibler Flüssigkeiten.

1.3 Laméproblem: Für $f \in L^2(\Omega)$ finde $\sigma \in Q := L^2(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n}_{sym})$ und u $\in V := H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, sodass

$$\begin{aligned} f + \text{div}\mathbb{C}\varepsilon(u) &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbb{C}^{-1}\sigma - \varepsilon(u) &= 0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

wobei u und der symmetrische Drucktensor σ die Verzerrung und den Druck auf einen Körper Ω beschreiben. $\mathbb{C} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ beschreibt die kontinuierliche Relation zwischen Druck und Verzerrung.

2. Darstellung der Residuen

2.1 Poissonproblem: Nutze Formel (5) und Isomorphie zwischen $L^2(\Omega)$ und $L^2(\Omega)^*$, somit gilt $\|\mathcal{R}es_Q(q)\|_{Q*} = \|p_l - \nabla\tilde{u}_l\|_Q$.
Nutze, dass f+divp_l die Rieszsche Darstellung von $\mathcal{R}es_V$ ist, somit gilt $\|\mathcal{R}es_V(v)\|_{V*} = \|f + \text{div}p_l\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

2.2 Stokesproblem: Nutze Formel (5) und Isomorphie, somit gilt $\|\mathcal{R}es_Q(q)\|_{Q*} = \|\text{div}\tilde{u}_l\|_Q$.
Durch Umformung gilt für $\|\mathcal{R}es(v)\|_V \approx 2\mu\|\varepsilon_l(u_l) - \varepsilon(\tilde{u}_l)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n}}\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n}}$ $+ \left|\int_\Omega f \cdot v dx + \int_\Omega \sigma_l : \nabla v dx\right|$.

2.3 Laméproblem: Für das Konsistenzresiduum gilt: $\|\mathcal{R}es_Q(q)\|_{Q*} = \|\varepsilon(\tilde{u}_l) - \mathbb{C}^{-1}\sigma_l\|_Q$
Für das Equilibriumsresiduum gilt: $\|\mathcal{R}es_V(v)\|_{V*} = \int_\Omega f \cdot v dx - \int_\Omega \varepsilon(v) : \sigma_l dx$.

3. Fehlerschätzer

3.1.1 Poissonproblem, konforme Finite Elemente Methode:

Konforme Methoden approximieren $p = \nabla u$ durch $p_l := \nabla u_l$. Somit gilt $\mathcal{R}es_{Cons}\mathcal{R}es_Q = 0$.
Durch Anwendung einer Greenschen Identität und Satz 5.2 erhält man den Fehlerschätzer $\eta_l = \|h_\mathcal{E}^{1/2} R_\mathcal{E}\|_{L^2 \cup \mathcal{E}_l}$ mit $R_\mathcal{E} := [p_l \cdot v_\mathcal{E}]_\mathcal{E}$.

3.1.2 Poissonproblem, nicht-konforme Finite Elemente Methode ($CR_1(\mathcal{T}_l)$):

Satz 5.1 liefert uns die Äquivalenz der Konsistenzfehlerschätzer für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$\eta_1 := \|h_\mathcal{T}^{-1}(u_l - A_{\mathcal{T}_l} u_l\|_{L^2(\Omega)}$

$\eta_2 := \|h_\mathcal{E}^{1/2}[\nabla u_l \cdot \tau_\mathcal{E}]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l)}$

$\eta_3 := \|h_\mathcal{E}^{-1/2}[u_l]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l)}$

Der Equilibriumsfehlerschätzer vom konformen Fall kann für $V_l = CR_1(\mathcal{T}_l)$ verwendet werden.

3.1.3 Poissonproblem, gemischte Finite Elemente Methoden (RT_0):

Für den Konsistenzfehlerschätzer erhält man $\eta_l := \|h_{\mathcal{T}} \text{curl}_l p_l\|_{L^2(\Omega)} + \|h_{\mathcal{E}}^{1/2}[p_l \cdot \tau_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l)}$.
Für den Equilibriumsschätzer erhält man $\|\mathcal{R}es_{eq}\|_{v^*} \lesssim osc(f, \mathcal{T}_l)$ oder alternativ durch Anwendung von Satz 5.2 $\|\mathcal{R}es_{eq}\|_{v^*} \lesssim Osc(\mathcal{R}_{\mathcal{T}}, \mathcal{K}_l)$.

3.2.1 Stokesproblem, gemischte konforme Finite Elemente Methoden:

Im konformen Fall erhält man für den Konsistenzfehler $\|\mathcal{R}es_{cons}\|_{Q^*} = \|\text{div } u_l\|_{L_0^2(\Omega)}$.
Mit Anwendung des Satzes 5.2 lässt sich der Fehlerschätzer
$\eta_{eq} := Osc(\mathcal{R}_{\mathcal{T}}, \mathcal{K}_l) + \|h_{\mathcal{E}}^{1/2}[\sigma_l \cdot v_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l)}$ für den Equilibiriumsfehler definieren.

3.2.2 Stokesproblem, nicht-konforme Finite Elemente Methoden($CR_1(\mathcal{T}_l)$):

Für $V_l = CR_{1,0}(\mathcal{T}_l; \mathbb{R}^2)$ und $Q_l = P_0(\mathcal{T}_l)$ definiert man mit Satz 5.1 die Konsistenzfehlerschätzer
$\eta_1 := \|h_{\mathcal{E}}^{1/2}[\nabla u_l \cdot \tau_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l;\mathbb{R}^2)}$
$\eta_2 := \|h_{\mathcal{E}}^{-1/2}[u_l]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l;\mathbb{R}^2)}$.
Der Equilibriumsfehlerschätzer ist derselbe wie aus 3.2.1.

3.3.1 Laméproblem, konforme Finite Elemente Methoden:

Für beliebige konforme Finite Elemente Methoden verschwindet das Konsistenzresiduum und für den Equilibriumsfehler lässt sich der gleiche Fehlerschätzer wie aus 3.2.1 definieren.

3.3.2 Laméproblem, nicht-konforme Finite Elemente Methode:

Mit $V_l := P_{1,0} \times CR_1(\mathcal{T}_l)$ ist η_{eq} analog zu 3.2.1. Das Konsistenzresiduum verschwindet jedoch nicht und kann mit Satz 5.1 durch äquivalente Fehlerschätzer
$\eta_1 := \|h_{\mathcal{E}}^{1/2}[\nabla u_l \cdot \tau_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l)}$
$\eta_2 := \|h_{\mathcal{E}}^{-1/2}[u_l]_{\mathcal{E}_l}\|_{L^2(\cup\mathcal{E}_l)}$ abgeschätzt werden.

3.3.3 Laméproblem, gemischte Finite Elemente Methode, Plane Elasticity Element with Reduced Symmetry(PEERS):

Der Fehlerschätzer für den Konsistenzfehler ist definiert durch $\mu := \min_{\tilde{u}_l \in V} \|\varepsilon(\tilde{u}_l) - \mathbb{C}^{-1} \text{ sym } \sigma_l\|_Q$ und lässt sich durch eine Helmholtzzerlegung umformen zu$\mu = \|\text{CurlCurl}\beta\|_Q$
Der Equilibriumsfehler kann wie in 3.1.3 mit $\|\mathcal{R}es_V\|_{V^*} \lesssim osc(f, \mathcal{T}_l)/\pi$ abgeschätzt werden.

3.3.4 Laméproblem, Arnold-Winther Finite Elemente:

Mit $V := H(div; \Omega; \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym})$ und $Q := L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ und ihren diskretisierten Räumen kann das Equilibriumsresiduum durch $osc(f, \mathcal{T}_l)$ abgeschätzt werden. Der Konsistenzfehler wird analog zu 3.3.3 mit $\mu = \|\text{CurlCurl}\beta\|_Q$ geschätzt.