A Review of Unified A Posteriori Finite Element Error Control
Teil 2 - Fehlerabschätzungen (Cindy Ku)

Konsistenzfehler

Satz 5.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, für eine Crouzeix-Raviart Funktion $u_\ell \in \mathrm{CR}_{1,0}(\mathscr{T}_\ell)$ und mit $V = H_0^1(\Omega)$ und $Q = L^2(\Omega)$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\min_{v \in V} \|\nabla_\ell u_\ell - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} &\leq \min_{v_\ell \in P_{1,0}(\mathscr{T}_\ell)} \|\nabla \ell u_\ell - \nabla v_\ell\|_{L^2(\Omega)} && \text{(5.1a)}\\
&\lesssim \min_{v_\ell \in P_{1,0}(\mathscr{T}_\ell)} \|h_{\mathscr{T}}^{-1}(u_\ell - v_\ell)\|_{L^2(\Omega)} && \text{(5.1b)}\\
&\leq \|h_{\mathscr{T}}^{-1}(u_\ell - A_{\mathscr{T}_\ell} u_\ell)\|_{L^2(\Omega)} && \text{(5.1c)}\\
&\lesssim \|h_{\mathscr{E}}^{-\frac{1}{2}} [u_\ell]_{\mathscr{E}_\ell} \|_{L^2(\bigcup \mathscr{E}_\ell)} && \text{(5.1d)}\\
&\lesssim \|h_{\mathscr{E}}^{\frac{1}{2}} [\nabla_\ell u_\ell \cdot \tau_{\mathscr{E}}]_{\mathscr{E}_\ell} \|_{L^2(\bigcup \mathscr{E}_\ell)} && \text{(5.1e)}\\
&\lesssim \min_{v \in V} \|\nabla_\ell u_\ell - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} && \text{(5.1f)}
\end{aligned}$$

Der Mittelwertoperator $A_{\mathscr{T}_\ell} : \mathrm{CR}_1(\mathscr{T}_\ell) \to P_1(\mathrm{T}_\ell)$ im Satz ist defniert durch

$$A_{\mathscr{T}_\ell} u_\ell(z) := \sum_{T \in \mathscr{T}_\ell(z)} \frac{u_\ell|_T(z)}{|\mathscr{T}_\ell(z)|} \qquad \textit{für alle } z \in \mathscr{N}_\ell$$

Expliziter Equilibriumsfehler

Wir betrachten nun den Fehler von Residuen der Form

$$R(v) = \int_\Omega R_{\mathscr{T}} \cdot v \, dx + \int_{\bigcup \mathscr{C}_\ell} R_{\mathscr{C}} \cdot \{v\}_{\mathscr{C}_\ell} ds \tag{5.3}$$

für beliebige Funktionen $R_{\mathscr{T}} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ und $R_{\mathscr{C}} \in L^2(\bigcup \mathscr{C}_\ell; \mathbb{R}^m)$ definiert für eine reguläre Triangulierung $\mathscr{T}_\ell \subset \Omega$ mit der zugehörigen Menge $\mathscr{C}_\ell$. Dabei setzen wir $R_T := R_{\mathscr{T}}|_T$ für Dreiecke bzw. Tetraeder $T \in \mathscr{T}_\ell$ und $R_C := R_{\mathscr{C}}|_C$ für $C \in \mathscr{C}_\ell$.

Annahme 5.1. *Es gibt einen Operator $\Pi : V_\ell^c \to V_\ell^{nc}$, sodass für alle $v_\ell \in V_\ell^c$ und $T \in \mathscr{T}_\ell$ gilt*

$$\|\nabla_\ell(\Pi v_\ell)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla v_\ell\|_{L^2(\Omega)} \quad \textit{und} \quad \int_T v_\ell \, dx = \int_T \Pi v_\ell \, dx. \tag{5.4}$$

Weiter gilt für die diskrete Approximation $p_\ell \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{m \times n})$

$$\int_\Omega p_\ell : \nabla v_\ell \, dx = \int_\Omega p_\ell : \nabla_\ell(\Pi v_\ell) \, dx.$$

. . . .

Satz 5.2. *Sei $R : V + V_\ell^{nc} \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $V_\ell^{nc} \subset \ker(\mathrm{R})$ für den nicht konformen Finite Elemente Raum V_ℓ^{nc}; es ist von der Form* (5.3). *Außerdem gibt es einen Operator Π wie in der Annahme* 5.1. *Betrachte*

$$\eta_\ell := \left(\sum_{C \in \mathscr{C}_\ell} h_C \|R_C\|_{L^2(C)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|h_{\mathscr{C}}^{\frac{1}{2}} R_{\mathscr{C}}\|_{L^2(\bigcup \mathscr{C}_\ell)}$$

mit der zugehörigen Triangulierung $\mathscr{T}_\ell$ mit der Menge der inneren Knoten $\mathscr{K}_\ell$. Dann ist η_ℓ ein zuverlässiger und effizienter Fehlerschätzer für $\|R\|_{V^*}$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
\eta_\ell &\lesssim \|R\|_{V^*} + \mathrm{osc}(R_{\mathscr{T}}, \mathscr{T}_\ell) + \mathrm{osc}(R_C, \mathscr{C}_\ell) && \text{(5.6a)}\\
\|R\|_{V^*} &\lesssim \eta_\ell + \mathrm{Osc}(R_{\mathscr{T}}, \mathscr{K}_\ell) && \text{(5.6b)}
\end{aligned}$$