A posteriori und a priori Abschätzungen für FE-Approximationen von selbstadjungierten elliptischen Eigenwert-Problemen

Hauptseminar Wissenschaftliches Rechnen - Prof. M. Rumpf

Lukas-Daniel Prenzel

26. Januar 2017

Problem: Finde Eigenpaare $\{u, \lambda\}$, wobei u ein Eigenvektor und λ ein Eigenwert ist, sodass

$$-\Delta u - \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{0.1}$$

Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ ein beschränktes Gebiet.

Das Problem (0.1) lässt sich mittels klassischer FEM diskretisieren. Die diskrete Formulierung ist: Finde $u_h \in \mathcal{V}_h^p$ und $\lambda_h \in \mathbb{R}$ sodass $a\left(u_h, v\right) - \lambda\left(u_h, v\right) = 0$ für alle $v \in \mathcal{V}_h^p$, wobei $a\left(v, w\right) := \left(\nabla v, \nabla w\right)$.

Frage: Inwiefern approximieren das Spektrum und der Eigenraum des diskreten Problems die entsprechenden Objekte des kontinuierlichen Problems?

Wir gehen davon aus, dass es einen linearen Operator $\pi : \mathcal{H}_0^1 \to \mathcal{V}_h^p$ gibt, sodass für eine Konstante $c > 0$ gilt

$$\|h^{l-k} D_i^l \left(v - \pi v\right) \leq c\|D^k v\|, \qquad v \in \mathcal{H}^k \cap \mathcal{H}_0^1, \qquad 0 \leq l \leq p+1 \tag{0.2}$$

Sei $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ das Spektrum von $-\Delta$ und $\Lambda \subset \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Menge von Eigenwerten. Es bezeichne $E\left(\Lambda\right)$ den von allen Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda \in \Lambda$ aufgespannten Raum, und $E\left(\lambda\right)$ den Eigenraum des EW λ.

Definition 1 (Fehler)**.** Sei $\{u_h, \lambda_h\}$ ein Eigenpaar des diskretisierten Problems, wobei $\|u\| = 1$ sei und λ_h einen Eigenwert λ von $-\Delta$ approximiere. Der Fehler e_Λ in u_h bzgl. $E\left(\Lambda\right)$ sei definiert durch

$$e_\Lambda = \left(I - P_\Lambda\right) u_h = Q_\Lambda u_h$$

wobei P_Λ die $\mathcal{L}^2$-Projektion auf $E\left(\Lambda\right)$ bezeichne, und $Q_\Lambda = I - P_\Lambda$.

1 Fehlerdarstellung und Stabilitätsanalyse

Fehlerdarstellung

A posteriori Abschätzung basieren auf verschiedenen Darstellungsformen für den Fehler in Abhängigkeit der diskreten Lösung $\{u_h, \lambda_h\}$ und Lösungen φ des dualen Problems

$$-\Delta\varphi - \lambda\varphi = \psi \quad \text{in } \Omega, \qquad \varphi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.1}$$

für verschiedene Daten ψ. Es gilt

$$\begin{aligned}(u_h, \psi) &= a(u_h, \varphi) - \lambda(u_h, \varphi) \\ &= \left(u_h, \varphi - \pi\varphi\right) - \lambda_h\left(u_h, \varphi - \pi\varphi\right) + \left(\lambda_h - \lambda\right)\left(u_h, \varphi\right)\end{aligned} \tag{1.2}$$

Das Residuum besteht aus zwei Teilen, einem inneren und einem Kanten-Teil.

Definition 2 (Residuum)**.** Definiere für jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ den inneren Teil R_i und den Kanten-Teil R_e des Residuums durch

$$R_i(u_h, \lambda_h)|_T := |\Delta u_h + \lambda_h u_h|, \qquad R_e(u_h)|_T := (h\ vol(T))^{-1/2} \left(\int_{\partial T \setminus \partial\Omega} |\frac{1}{2} n \cdot [\nabla u_h]\,|^2 da \right)^{1/2}$$

wobei $[\nabla u_h]$ der Sprung des Gradienten entlang von ∂T ist. Das Residuum ist dann definiert durch

$$R(u_h, \lambda_h) := R_i(u_h, \lambda_h) + R_e(u_h).$$

Lemma 1.1. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{V}_h^p$, $w \in \mathcal{H}^k \cap \mathcal{H}_0^1$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass

$$|a\,(v, w - \pi w) - \gamma\,(v, w - \pi w)| \leq c \|h^k R(v, \gamma)\| \|D^k w\| \qquad 1 \leq k \leq p+1.$$

Stabilitätsanalyse

Wir nehmen an, dass ein $t \geq 0$ und Konstanten $C_{r,s}$ existieren, sodass

$$\|D^{2+s} v\| \leq C_{r,s} \|\Delta v\|_{\mathcal{H}^s}, \qquad v \in \mathcal{H}^{2+s} \cap \mathcal{H}_0^s, \qquad 0 \leq s \leq t \tag{1.3}$$

Es sei zudem bemerkt, dass daraus folgt, dass es Konstanten $C_{e,s}$ gibt, sodass für alle $v \in \mathcal{H}^{2+s} \cap \mathcal{H}_0^1$ mit $\Delta^j v|_{\partial\Omega} \equiv 0$ (wobei $j < (2+s)/2$) gilt

$$\|D^{2+1} v\| \leq C_{e,s} \|(-\Delta)^{(2+s)/2} v\|, \qquad 0 \leq s \leq t \tag{1.4}$$

Wir zerlegen die Lösung φ von des dualen Problems in $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, wobei für φ_0, φ_1 gelte

$$-\Delta\varphi_0 = \psi \quad \text{in } \Omega, \qquad \varphi_0 = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.5}$$

gilt und φ_1 erfülle

$$-\Delta\varphi_1 - \lambda\varphi_1 = \lambda\varphi_0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \varphi_1 = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.6}$$

Im Folgenden sei der Stabilitätsfaktor $S_{\Lambda,s,m}$ definiert durch

$$S_{\Lambda,s,m} = \max_{\lambda_i \notin \Lambda} \frac{\lambda \lambda_i^{(s+m)/2}}{|\lambda_i - \lambda|} \qquad m = 0, 1 \tag{1.7}$$

Lemma 1.2. Mit den Annahmen bzgl. der Triangulierung und (1.3) gilt für den Fehler $e_\Lambda = Q_\Lambda u_h$, dass

$$(1-\delta)\|D^m e_\Lambda\|^2 \leq a(u_h, \varphi - \pi\varphi) - \lambda_h(u_h, \varphi - \pi\varphi) \qquad m = 0, 1$$

wobei φ orthogonal zu $E(\Lambda)$ ist und eine Lösung des dualen Problems mit rechter Seite $\psi = (-\Delta)^m e_\Lambda$. Desweiteren ist $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, mit $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{H}_0^1$, und

$$\|D^{2-m} \varphi_0\| \leq C_m \|D^m e_\Lambda\|$$

$$\|D^{2+s} \varphi_1\| \leq C_{e,s} S_{\Lambda,s,m} \|D^m e_\Lambda\| \qquad 0 \leq s \leq min(t, 2-m)$$

mit $C_0 = C_{e,0}$, $C_1 = 1$, dem in (1.7) definierten Stabilitätsfaktor $S_{\Lambda,s,m}$ für $m = 0, 1$ und t wie in (1.3). Für den Fehler des Eigenwertes gilt

$$(1-\delta)(\lambda_h - \lambda) \leq -\left[a(u_h, \varphi - \pi\varphi) - \lambda_h(u_h, \varphi - \pi\varphi)\right]$$

wobei für $\varphi = P u_h$

$$\|D^{2+s} \varphi\| \leq C_{e,s} \lambda^{(2+s)/2}, \qquad 0 \leq s \leq t$$

2 Hauptresultate

Satz 2.1. Für eine entsprechende Triangulierung $\mathcal{T}_h$ und mit den Annahmen (0.2), (1.3) haben wir die folgende a posteriori Abschätzung für den Fehler des diskreten Eigenvektors

$$\|D^m e_\Lambda\| \leq c S_m \|h^{2-m} R(u_h, \lambda_h)\|, \qquad m = 0, 1$$

mit dem Stabilitätsfaktor $S_m = C_m + C_{e-\beta_m} S_{\Lambda,\beta_m - m, m} h_{max}^{\beta_m}$, $\beta_m = min\,(t+m, p+m-1, 2)$. Für den Fehler des diskreten Eigenwertes haben wir die a posteriori Abschätzung

$$\lambda_h - \lambda \leq c S_3 \|h^k R(u_h, \lambda_h)\|, \qquad k \leq min\,(2+t, +p1)$$

mit $S_3 = C_{e,k-2} \lambda^{k/2}$.

Sei Λ_h die Menge der diskreten eigenwerte, welche die Eigenwerte in Λ approximieren, und es sei $E_h(\Lambda_h)$ der von allen Eigenvektoren zu EW aus Λ_h aufgespannte Raum. Ein Maß für den Fehler zwischen $E = E(\Lambda)$ und $E_h = E_h(\Lambda_h)$ ist definiert durch

$$\delta_m = \sup_{\xi \in E_h, \|\xi\|=1} \|D^m Q_\Lambda \xi\| \qquad m = 0, 1$$

Seien $\{\lambda_{h,j}\}_{j=1,\ldots,m}$ die zu $E_h(\Lambda_h)$ assoziierten Eigenwerte. Das Residuum $R(E_h, \Lambda_h)$ ist die vektorwertige Funktion $R(E_h, \Lambda_h) = \left(R(u_{h,j}, \lambda_{h,j})\right)_{j=1,\ldots,m}$

Korollar 2.1. Vor. wie in Satz (2.1) und $S_4 = \max_{\lambda \in \Lambda} S_m(\lambda)$, dann gilt für den Fehler in E_h

$$\delta_m(E, E_h) \leq c S_4 \|h^{2-m} R(E_h)\|$$

Um uns nun einer a priori Abschätzung zuzuwenden führen wir zwei weitere Konstanten ein. Es existiere eine Konstante μ, sodass für je zwei Dreiecke $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_h$ mit einer gemeinsamen Kante oder Knoten gilt $|1 - (h_1/h_2)^2| \leq \mu$. Für $\alpha = 1, 2, \ldots$ definieren wir

$$C_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha \leq 2 \\ \left(\frac{h_{max}}{h_{min}}\right)^{\alpha-2} & \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Wir müssen zudem verlangen, dass falls $\alpha \geq 2$ gilt zusätzlich $\mu C_\alpha C_{e,0} \leq \gamma$ für ein hinreichend kleines γ.

Unter diesen Voraussetzungen und denen von Satz (2.1) erhalten wir die folgende a priori Abschätzung.

Satz 2.2. Ist $\lambda_h C_\alpha S_0 h_{max}^2$ hinreichend klein, dann gilt für $1 \leq k \leq min\,(2+1, p+1)$

$$\|h^\alpha R(u_h, \lambda_h)\| \leq c \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \lambda_h \lambda_j^{-1} \|h^{\alpha+k-2} D^k P_{\lambda_j} u_h\|$$

also inbesondere für $\Lambda = \{\lambda\}$

$$\|h^\alpha R(u_h, \lambda_h)\| \leq C_2 \|h^{\alpha+k-2} D^k P_\lambda u_h\|$$

mit $C_2 = c \lambda_h \lambda^{-1}$.

Bemerkung 2.1. Da $P_{\lambda_j} u_h = \alpha_j u_j$ ist (wobei u_j ein Eigenvektor von $-\Delta$ mit zugehörigem Eigenwert λ_j ist, mit $\|u_j\| = 1$, also $\alpha_j \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha_j| \leq 1$) handelt es sich bei bei obigem Satz in der Tat um eine a priori Fehlerabschätzung.

Unter Kombination der Sätze (2.1) und (2.2) erhalten wir die folgende a-posteriori-a-priori Abschätzung.

Korollar 2.2. Es gilt für $1 \leq k \leq min(2+t, p+1)$ für den Fehler des Eigenvektors

$$\|D^m e_\lambda\| \leq c S_m \|h^{2-m} R(u_h, \lambda_h)\| \leq c C_1 S_m \|h^{k-m} D^k P_{\lambda_j} u_h\| \qquad m = 0, 1.$$

Und für den Fehler des Eigenwertes gilt

$$\lambda_h - \lambda \leq C_2 S_3 \|h^k R(u_h, \lambda_h)\| \leq c C_1 S_3 \|h^{2k-2} D^k P_\lambda u_h\|$$

mit C_2 wie in Satz (2.2).