Seminarvortrag "ON THE A POSTERIORI ERROR ANALYSIS FOR EQUATIONS OF THE PRESCRIBED MEAN CURVATURE"

Anne Scholz

January 25, 2017

1 Definitionen

Problem 1 *Finde eine Funktion u mit Randwerten g mit mittlerer Krümmung H/d, d.h. finde u, so dass*

$$-div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = H \ in\ \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ u = g\ auf\ \partial\Omega$$

Problem 2 *(Schwache Formulierung) Finde $u \in U$, so dass*

$$\forall v \in\ V\ \int_\Omega a(\nabla u)\cdot\nabla v = \int_\omega Hv$$

Problem 3 *(Diskrete Formulierung) Finde $u_h \in U_h$, so dass*

$$\forall v_h \in\ V_h\ \int_\Omega a(\nabla u_h)\cdot\nabla v_h = \int_\Omega Hv_h$$

Definition 1 *Als Fehlerbegriff verwenden wir im folgenden*

$$e_\omega(u,v) = \left(\int_\Omega |N(\nabla u) - N(\nabla v)|^2 \frac{A(\nabla u) + A(\nabla v)}{2}\right)^{1/2}$$

für $\omega \in \Omega$ und $u, v \in H^{1,1}(\Omega)$.

Definition 2 *Das Residuum $R_h \in V'$ von u_h ist definiert durch*

$$\forall\varphi \in V\langle R_h,\varphi\rangle = \int_\Omega a(\nabla u_h)\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega H\varphi$$

2 Ergebnisse

Satz 1 *Sei $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$ eine Lösung der obigen schwachen Formulierung und u_h eine Lösung des diskreten Problems. Dann*

(i) Lokale untere Schranke: Für jedes $T \in \mathcal{T}_h$

$$\frac{\eta_h(T)}{sup_{\omega_T}\Lambda(\nabla u)^{1/2})} \preceq e_{\omega_T}(u_h,u) + \frac{||h(\bar{H}-H)||_{0,2,\omega_T}}{sup_{\omega_T}\Lambda(\nabla(u)^{1/2})}$$

(ii) Bedingte globale obere Schranke: Falls

$$||\nabla(u-u_h)||_{0,\infty,\Omega} \leq M$$

für ein festes $M > 0$, dann gilt

$$e_\Omega(u_h,u) \preceq \left(\frac{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\eta_h(T)^2}{inf_\Omega\lambda^M(\nabla u)} + \underset{\Omega}{sup}\Lambda(\nabla u)||\nabla(\hat{g_h}-\hat{g})||^2_{0,2,\Omega}\right)^{1/2},$$

wobei $\lambda^M(p) := [1+(|p|+M)^2]^{-3/2}$ und $\hat{g}_h$ bzw. $\hat{g}$ $H^1(\Omega)$-Erweiterungen von g_h bzw. g sind.

Satz 2 *Sei u eine Lösung der obigen schwachen Formulierung, u_h eine Lösung des diskreten Problems und $H \in L_d(\Omega)$ und es gelte $\exists \epsilon > 0 \forall v \in V \int_\Omega Hv \leq (1-\epsilon)\int_\Omega |\nabla v|$. Dann*

(i) Lokale untere Schranke: Für jedes $T \in \mathcal{T}_h$

$$\frac{\tilde{\eta}_h(T)}{\Lambda_h(T)^{1/2}} \preceq e_{\omega_T}(u_h, u) + \frac{||h^{d/2}(\bar{H} - H)||_{0,d,\omega_T}}{\Lambda_h(T)^{1/2}}$$

(ii) Bedingte globale obere Schranke: Es existiert eine Konstante C, die nur von der Regularität des Gebiets abhängt (d.h. von $\gamma_h := \max\limits_{T\in\mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T}$), so dass

$$M_h := \max_{T\in\mathcal{T}_h} Q_h(T) h_T^{-d/2} \tilde{\eta}_h(T) \leq C$$

impliziert, dass

$$e_\Omega(u_h, u) \preceq \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \frac{\tilde{\eta}_h(T)^2}{\lambda_h(T)} + \int_\Omega |\nabla(\hat{g}_h - \hat{g})|^2 \Lambda(\nabla u_h) \right)^{1/2}$$

wobei $\hat{g}_h$ bzw. $\hat{g}$ $H^1(\Omega)$-Erweiterungen von g_h bzw. g sind.

3 Notation

$A(p) := \sqrt{1+\|p\|^2},\ A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$	$\gamma_h := \max\limits_{T\in\mathcal{T}_h} \frac{h_T}{2\rho_T}$
$a(p) := \nabla A(p) = \frac{p}{\sqrt{1+\|p\|^2}},\ a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$	$Q_h(T) := \sup\limits_{\tilde{\omega}_T} Q(\nabla u_h)$
$\lambda(p) = (1+\|p\|^2)^{-3/2}$(minimaler Eigenwert von $D^2A(p)$)	$\lambda_h(T) := Q_h(T)^{-2}(\inf\limits_{\tilde{\omega}_T} \sqrt{1+\|\nabla u_h\|^2})$
$\Lambda(p) = (1+\|p\|^2)^{-1/2}$(maximaler Eigenwert von $D^2A(p)$)	$\Lambda_h(T) := \sup\limits_{\omega_T} \Lambda(\nabla u_h)$
$Q(p) = \frac{\Lambda(p)}{\lambda(p)} = 1 + \|p\|^2 \underset{\|p\|\to\infty}{\to} \infty$	$N(p) := \frac{(p,-1)}{\sqrt{1+\|p\|^2}} \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ für } p \in \mathbb{R}^d$