A review of unified a posteriori finite element error control

Angelina Steffens — Teil 1 — 20. Januar 2017

Seien Q, V $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Normen $\|.\|_Q, \|.\|_V$ und $\mathcal{A} : Q \text{ x } V \to (Q \text{ x } V)^*$ der lineare Operator.
Wir wollen Probleme der Form $\mathcal{A}(p,u) = l$ mit $l \in (Q \text{ x } V)^*$ lösen.
Mit $a : Q \text{ x } Q \to \mathbb{R}$, $c : V \text{ x } V \to \mathbb{R}$, $l_Q : Q \to \mathbb{R}$, $l_V : V \to \mathbb{R}$, $\Lambda : V \to Q$ und $b : Q \text{ x } V \to \mathbb{R}$, $b(q,v) := a(q, \Lambda v)$ haben wir

$$\mathcal{A}(p,u)(q,v) := a(p,q) + b(p,v) - b(q,u) + c(u,v) \tag{1}$$

$$l(q,v) := l_Q(q) + l_V(v) \tag{2}$$

Die gemischte Formulierung lautet somit: Suche $(p,u) \in Q \text{ x } V$, sodass

$$\forall q \in Q : \quad a(p,q) - b(q,u) = l_Q(q) \tag{3}$$

$$\forall v \in V : \quad b(p,v) + c(u,v) = l_V(v) \tag{4}$$

Definition. Für die Lösung $(p,u) \in Q \text{ x } V$ eines wohlgestellten Problems $\mathcal{A}(p,u) = l$ und eine Approximation $(p_l, u_l) \in Q \text{ x } V$ ist der *Fehler* $e := (p,u) - (p_l - u_l) = (p - p_l, u - u_l)$ und das *Residuum* $\mathcal{R}es := \mathcal{A}(p - p_l, u - \tilde{u}_l) = \mathcal{A}(p,u) - \mathcal{A}(p_l, \tilde{u}_l)$.
Dann ist $\mathcal{R}es(q,v)$ die Summe der Partialresiduen

$$\mathcal{R}es_Q = l_Q - a(p_l, .) + b(., \tilde{u}_l) \in Q^* \tag{5}$$

$$\mathcal{R}es_V = l_V - b(p_l, .) - c(\tilde{u}_l, .) \in V^* \tag{6}$$

Theorem. 3.1
i) Eine Bilinearform $\mathcal{A} : (Q \text{ x } V) \text{ x } (Q \text{ x } V) \to \mathbb{R}$ mit Bilinearformen a, b, c ist symmetrisch gdw. a und c symmetrisch sind und $b = 0$.
ii) Eine Bilinearform $\mathcal{B} : V \text{ x } V \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(u,v) := \mathcal{A}(\Lambda u, u)(\Lambda v, v)$ mit Bilinearformen a, b, c ist symmetrisch gdw. a und c symmetrisch sind und $b(\Lambda u, v) = b(\Lambda v, u)$.

Theorem. 3.2
Sei $\mathcal{A}$ das Skalarprodukt im Hilbertraum $\mathscr{H}$ mit $\mathcal{R}es = \mathcal{A}(e, .) = \mathcal{A}(e)$ für $e \in \mathscr{H}$. Dann gilt $\forall v \in \mathscr{H}$ mit $\|v\|_{\mathscr{H}} = 1$, dass

$$\frac{\|e\|_{\mathscr{H}} - \mathcal{R}es(v)}{\|e\|_{\mathscr{H}}} = \frac{1}{2}\|v - \frac{e}{\|e\|_{\mathscr{H}}}\|^2_{\mathscr{H}}$$

Lemma. Es gilt:
1. $(\psi_z : z \in \mathcal{K}_l)$ ist eine Lipschitz-stetige Zerlegung der Eins auf Ω:
   $\sum_{z \in \mathcal{K}_l} \psi_z = 1$ fast überall auf Ω und $\forall z \in \mathcal{K}_l : 0 \leq \phi_z \leq \psi_z \leq 1$
2. Mit $\psi_z \neq \phi_z$ folgt $\mathcal{E}_l(\mathcal{T}_l(z)) \cap \mathcal{E}_l(\partial\Omega) \neq \emptyset$ bzw. $\mathcal{F}_l(\mathcal{T}_l(z)) \cap \mathcal{F}_l(\partial\Omega) \neq \emptyset$
3. Die Träger $\text{supp}\psi_z$ haben endliche Überschneidungen: $\max_{x \in \Omega, l \in \mathbb{N}} |\{z \in \mathcal{K}_l : x \in \text{supp}\psi_z\}| \lesssim 1$

Definition. Sei g_ω das Integralmittel von $g \in L^2(\omega, \mathbb{R}^m)$ und $\mathscr{S}$ eine Menge von messbaren Teilmengen ω von Ω mit Durchmesser h_ω, dann ist die *Oszillation* von g auf $\mathscr{S}$ definiert als

$$\text{osc}(g, \mathscr{S}) := (\sum_{\omega \in \mathscr{S}} h_\omega^q \|g - g_\omega\|^2_{L^2(\omega)})^{\frac{1}{2}} \text{ mit } q = \begin{cases} 1 & \mathscr{S} \subset \mathcal{E}, \mathcal{F} \\ 2 & \mathscr{S} \subset \mathcal{T} \end{cases}$$

Die Oszillation auf $\mathcal{K}_l$ ist definiert als $\text{Osc}(g, \mathcal{K}_l) := \text{osc}(g, \{\text{supp}\psi_z : z \in \mathcal{K}_l\})$.
Es gilt $\text{osc}(g, \mathcal{T}_l) \leq \text{Osc}(g, \mathcal{K}_l)$

Definition. 4.1
Sei $g \in L^2(\Omega)$. Dann definiere den *gewichteten Interpolationsoperator* $J_l g \in P_{1,0}(\mathcal{T}_l)$ für $J_l : L^2(\Omega) \to P_{1,0}(\Omega)$ mit

$$J_l g := \sum_{z \in \mathcal{K}_l} \Big(\frac{\int_\Omega g \psi_z dx}{\int_\Omega \phi_z dx} \Big) \phi_z$$

Theorem. 4.2
Für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$ mit Interpolationsoperator $J_l g$ und der Menge der freien Knoten $\mathcal{K}_l$ von $\mathcal{T}_l$ in Ω gilt

$$\int_\Omega f(g - J_l g) dx \lesssim \text{Osc}(f, \mathcal{K}_l) \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$$