Halbierungs-Verfeinerung für n-simpliziale Gitter

Sophia Volmering, 27.01.2017

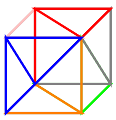
1 Das grobe Gitter

Definition 1.1. Zwei Simplizes $T, T' \subset \mathbb{R}^n$ heißen kongruent, wenn der erste Simplex T das Bild des zweiten Simplex T' unter einer Kongruenzabbildung, d.h. eine Abbildung der Form $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \alpha(Ax + b)$ für alle $x \in T'$, ist mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthonormal und $b \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1.3.

1. Das n-Referenzsimplex ist die geordnete Reihe von Knoten $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ mit $\hat{x}_0 = (0, \dots, 0)$ und $\hat{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{i} e_j$ für $i = 1, \dots, n$. Hier bezeichnet e_j den j-ten Einheitsvektor.
2. Das Simplex $T_\pi \subset \mathbb{R}^n$ ist die geordnete Reihe der Knoten $\pi(\hat{x}_0), \dots, \pi(\hat{x}_n)$ für ein $\pi \in S_n$.

Beispiel 1.6.



2 Der Halbierungsschritt

Algorithmus 1 Halbierung eines Simplex

Bisect(Simplex):
  Sei $k = n - l(Simplex) \ mod \ n$;
  Sei $z = \frac{1}{2}(x_0 + x_k)$;
  Erstelle $Abkomme_0 : x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, z, x_{k+1}, \dots, x_n$;
  Erstelle $Abkomme_1 : x_1, x_2, \dots, x_k, z, x_{k+1}, \dots, x_n$;
  Sei $l(Abkomme_0) = l(Simplex) + 1$;
  Sei $l(Abkomme_1) = l(Simplex) + 1$;

3 Die Zahl der Kongruenzklassen

Satz 3.1. *Sei T ein n-Simplex, erzeugt durch die wiederholte Anwendung des Halbierungsschritts auf ein Simplex des groben Gitters. Zu T, bestehend aus den geordneten Knoten $x_0, x_1, \dots, x_n$, definiere $y_0 = (0, \dots, 0)$ und $y_i = x_i - x_0$ für $i = 1, \dots, n$. Dann existiert eine Permutation $\pi \in S_n$ und eine Spiegelungsmatrix $R = Diag(\pm 1, \dots, \pm 1)$, sodass*

$$y_i = \alpha_i R \sum_{j=1}^{i} \pi(e_j)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und

$$\alpha_i = \begin{cases} 2^{-[\frac{l}{n}]} & falls \, i \in \{1, \dots, n - (l \, mod \, n)\} \\ 2^{-[\frac{l}{n}]-1} & falls \, i \in \{n - (l \, mod \, n) + 1, \dots, n\} \end{cases}$$

nur abhängig vom Level des Simplex ist.

Lemma 3.5. *Seien $i \neq j$ mit $0 \leq i, j \leq n$. Sei y_k definiert wie in Satz 3.1 für alle $k = 1, \ldots, n$.*

1. *Dann ist der Absolutwert aller von Null verschiedenen Einträge von $y_j - y_i$ identisch 1 genau dann, wenn $\alpha_i = \alpha_j = 1$; $|i - j|$ ist die Zahl der von Null verschiedenen Einträge in $y_j - y_i$ für $i, j \leq k$.*

2. *Falls $j > k = l(T)$, $i \leq k$, so ist der Absolutwert aller von Null verschiedenen Einträge in $y_j - y_i$ identisch $\frac{1}{2}$. Dies sind genau j Einträge.*

4 Der lokale Halbierungs-Verfeinerungs Algorithmus

Definition 4.1.

1. Ein Simplex T' heißt Nachbar vom Simplex T, wenn sie eine gemeinsame Seite haben und T' die zu halbierede Kante von T mit T gemeinsam hat.

2. Ein Simplex T' heißt kompatibel teilbar mit T, wenn T' ein Nachbar von T ist und T und T' die selbe Kante teilen werden.

Algorithmus 2 Verfeinerung eines Simplex

Refine(Simplex):
while Ein Nachbar ist nicht kompatibel teilbar und nicht in einer Menge M **do**
    Speicher Nachbar in M;
    Refine(Nachbar);
end while
Bisect(Simplex);
for jeden Nachbar **do**
    Bisect(Nachbar);
end for

Satz 4.3. *Seien das Simplex T und ein Nachbar T' wie in Satz 3.1 mit Knoten x_i von T und $x_i^{'}$ von T', $i = 0, \ldots, n$. Dann gibt es eine eindeutige Permutation $S_{n+1} \ni \sigma = (\sigma(0), \ldots, \sigma(n))$, sodass $x_i = x_{\sigma(i)}^{'}$ für alle bis auf ein i. Unter der Annahme, dass x_i und x_j geteilt werden, gilt*

1. *Falls $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq k := n - l(T)$, dann gilt $0 \leq \sigma(i), \sigma(j) \leq k' := n - l(T')$. Auch gilt $\sigma(j) = \sigma(0) + j$ oder $\sigma(j) = \sigma(0) - j$.*

2. *Falls j so, dass $i \leq k < j \leq n$, dann gilt $k' < \sigma(j) \leq n$ und $\sigma(j) = j$.*

3. *Entweder gilt $l(T') = l(T)$ oder $l(T') = l(T) - 1$. Im ersten Fall sind T und T' kompatibel teilbar, im zweiten Fall ist T mit einem der Abkommen von T' kompatibel teilbar.*

Beispiel 4.4.