Aufgabe 1: Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ aus der folgenden Gleichung:

$$9x - 2 = 6 + 13x\,.$$

LÖSUNG:

$$\begin{array}{rrcll} & 9x-2 & = & 6+13x & \mid +2 \\ \Leftrightarrow & 9x & = & 8+13x & \mid -13x \\ \Leftrightarrow & (-4)x & = & 8 & \mid :(-4) \\ \Leftrightarrow & & \boxed{\text{x = -2}} & . & \end{array}$$

Probe:

$$\left.\begin{array}{l} 9\cdot(-2)-2=-18-2=-20 \\ 6+13\cdot(-2)=6-26=-20 \end{array}\right\} \checkmark$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie x und $y \in \mathbb{R}$ aus den folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 12-3y+5x & = & 11y+37-6x \\ y-17 & = & 9x-27\,. \end{array}$$

LÖSUNG: Zeile II $\Leftrightarrow y = 9x - 27 + 17 = 9x - 10$
Zeile I umformen:

$$\begin{array}{rrrcl} 11x-14y=25 & \Leftrightarrow & 11x & = & 14y+25 \\ & \Leftrightarrow & 11x & = & 14\cdot(9x-10)+25 \\ & & & = & 126x-140+25 \\ & & & = & 126x-115 \\ & \Leftrightarrow & 115x & = & 115 \\ & \Leftrightarrow & & \boxed{\text{x = 1}} & . \end{array}$$

$$\Rightarrow y = 9\cdot 1 - 10 = 9 - 10 = -1\,.$$

Probe:

i)

$$(-1) - 17 = -18 = 9\cdot(+1) - 27 = 9 - 27 \qquad \checkmark$$

ii)

$$\begin{array}{rcl} 12-3\cdot(-1)+5\cdot 1 & = & 11\cdot(-1)+37-6\cdot 1 \\ \Leftrightarrow 12+3+5 & = & -11+37-6 \\ \Leftrightarrow 20 & = & 20 \quad \checkmark \end{array}$$

Lösungsverfahren: Einsetzungsverfahren!
Alternatives Lösungsverfahren: Additionsverfahren (später werden wir dieses Verfahren Gauss-Algorithmus nennen!)

$$\begin{array}{rrcrcrl} & 11x & - & 14y & = & 25 & \\ - & 9x & + & y & = & -10 & \mid \cdot 14 \\ \hline - & 115x & & & = & -115 & \mid :(-115) \\ & & & \boxed{\text{x = 1}} & . & & \end{array}$$

$$\Rightarrow\; -9 + y = -10 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\text{y=-1}}.$$

Aufgabe 3: Geben Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen an !
(*Achtung: Multiplikation mit negativen Zahlen führt zur Umkehrung des Ungleichheitszeichens.*)

a) $\dfrac{3x+2}{2x-1} < 2$

b) $\dfrac{2x+4}{5x-7} > 3$

LÖSUNG: a) **1. Fall:** $2x-1>0$, d.h. $x > \frac{1}{2}$
Aus obiger Ungleichung folgt nun unter Beachtung von $2x-1>0$:
$(3x+2) < 2(2x-1) \Longrightarrow 3x+2 < 4x-2 \Longrightarrow x > 4$.
Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 1.Fall:
$L_1 = \{x: \ x > \frac{1}{2} \text{ und } x > 4\} = \{x: \ x > 4\}$

2. Fall: $2x-1<0$, d.h. $x < \frac{1}{2}$
Aus obiger Ungleichung folgt nun:
$(3x+2) > 2(2x-1) \Longrightarrow 3x+2 > 4x-2 \Longrightarrow x < 4$.
Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 2. Fall:
$L_2 = \{x: \ x < \frac{1}{2} \text{ und } x < 4\} = \{x: \ x < \frac{1}{2}\}$

Die vollständige Lösung obiger Ungleichung ist damit
$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \{x: \ x > 4 \text{ oder } x < \frac{1}{2}\}$.

b) **1. Fall:** $5x-7>0$, d.h. $x > \frac{7}{5} = \frac{91}{65}$
Aus obiger Ungleichung folgt nun unter Beachtung von $5x-7>0$:
$(2x+4) > 3(5x-7) \Longrightarrow 2x+4 > 15x-21 \Longrightarrow x < \frac{25}{13} = \frac{125}{65}$.
Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 1.Fall:
$L_1 = \{x: \ x > \frac{91}{65} \text{ und } x < \frac{125}{65}\} = \{x: \ \frac{7}{5} < x < \frac{25}{13}\}$

2. Fall: $5x-7<0$, d.h. $x < \frac{7}{5} = \frac{91}{65}$
Aus obiger Ungleichung folgt nun:
$(2x+4) < 3(5x-7) \Longrightarrow 2x+4 < 15x-21 \Longrightarrow x > \frac{25}{13} = \frac{125}{65}$.
Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 2. Fall:
$L_2 = \{x: \ x < \frac{91}{65} \text{ und } x > \frac{125}{65}\} = \{\ \}$ (leere Menge!)

Die vollständige Lösung obiger Ungleichung ist damit
$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \{x: \ \frac{7}{5} < x < \frac{25}{13}\}$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie graphisch den Schnittpunkt der beiden folgenden Geraden:

$$\begin{aligned} 12 - 3y + 5x &= 11y + 37 - 6x \\ y - 17 &= 9x - 27\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie auch die Steigungen beider Geraden, sowie ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

LÖSUNG:

$$14y = 11x - 25 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{11}{14}x - \frac{25}{14}$$
$$y = 9x - 10$$

(siehe Lösung zu Aufgabe 2!)

An der „Normalform“ $y = mx + n$ einer Geradengleichung läßt sich die Steigung ablesen: m!
Also hier: $m_1 = \frac{11}{14}$ bzw. $m_2 = 9$.
Aber auch der Schnittpunkt mit der $y - Achse$: $x = 0 \quad \Rightarrow y = n$.
Also hier:

$$\begin{aligned} n_1 &= -\frac{25}{14} \quad &\Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \left(0, -\frac{25}{14}\right), \\ n_2 &= -10 \quad &\Rightarrow \text{Schnittpunkt: } (0, -10)\,. \end{aligned}$$

Schnittpunkte mit der $x - Achse$ ergeben sich aus der Bedingung $y = 0$:

$$0 = y = mx + n \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\frac{n}{m}}\,.$$

Also hier:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{-25/14}{11/14} \quad &\Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \left(\frac{25}{11}, 0\right), \\ x_2 = -\frac{(-10)}{9} &= \frac{10}{9} \quad &\Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \left(\frac{10}{9}, 0\right). \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist $(1, -1)$.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad y(x) = x^6\,; \qquad \text{b)} \quad y(x) = \frac{1}{x^4}\,; \\ &\text{c)} \quad y(x) = \sqrt{x}\,. \end{aligned}$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad y'(x) = 6x^5\,; \\ &\text{b)} \quad y'(x) = \frac{-4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}\,; \\ &\text{c)} \quad y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Nach Definition der Ableitung gilt:

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \text{a)}\ \frac{y(x+h)-y(x)}{h} &= \frac{(x+h)^6-x^6}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left[x^6+6x^5h+\binom{6}{2}x^4h^2+\ldots+\binom{6}{5}xh^5+h^6-x^6\right] \\
&= 6x^5+\underbrace{\left[\binom{6}{2}x^4h+\binom{6}{3}x^3h^2+\ldots+\binom{6}{5}xh^4+h^5\right]}_{\to 0 \text{ für } h\to 0} \\
&\Rightarrow \text{Beh.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\ \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^4}-\frac{1}{x^4}\right) &= \frac{1}{h}\frac{x^4-(x+h)^4}{x^4(x+h)^4} \\
&= \frac{1}{h}\frac{x^4-[x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4]}{x^4[x^4+\ldots+h^4]} \\
&= \frac{-[4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3]}{x^4[x^4+4x^3h+\ldots+h^4]} \\
&\to_{h\to 0} \frac{-4x^3}{x^8} \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{c)}\ \frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right) &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}}_{=1} \\
&= \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \to_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad y(x) = x\ln x\,; &&\text{b)} \quad y(x) = \frac{x}{\sin x}\,; \\
&\text{c)} \quad y(x) = \sin^2 x\,; &&\text{d)} \quad y(x) = \frac{1}{\cos x}\,; \\
&\text{e)} \quad y(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2\pi}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2\pi}\right).
\end{aligned}
$$

LÖSUNG: Wir setzen die Rechenregeln für das Ableiten voraus:

- Produktregel (Leibniz),
- Quotientenregel,
- Kettenregel,

sowie die Ableitungsformeln:

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \frac{1}{x}\,, \\
(\sin x)' &= \cos x\,, \\
(\cos x)' &= -\sin x\,.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{a) } y'(x) &= (x\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1\,.\\
\text{b) } y'(x) &= \left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{1\cdot\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\\
&= \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{x}{\sin x}\cdot\cot x\,.\\
\text{c) } y'(x) &= \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x\,.\\
\text{d) } y'(x) &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\tan x\,.\\
\text{e) } y'(x) &\equiv 0 \quad , \text{da } \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall\, z\in\mathbb{R}\,.\\
\text{oder}&\\
y'(x) &= 2\sin\frac{x}{2\pi}\cdot\cos\frac{x}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi} + 2\cos\frac{x}{2\pi}\cdot\left(-\sin\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\sin\frac{x}{2\pi}\cos\frac{x}{2\pi}\cdot(1-1)\equiv 0\,!
\end{aligned}$$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Extrema der folgenden Funktionen:

$$\text{a)}\quad y(x) = -x^2 - 4x + 1\ ; \quad \text{b)}\quad y(x) = Ax + \frac{B}{x} \qquad \text{für } A, B > 0.$$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -2x - 4 \overset{!}{=} 0\\
\Leftrightarrow &\ \boxed{\text{x = -2}}\ .\\
y''(x) &= -2 < 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x)$ hat an der Stelle $x = -2$ ein Maximum mit dem Wert $y(-2) = 5$.

Beachte:

$$\begin{aligned}
y(x) &= -x^2 - 4x + 1\\
&= -(x^2 + 4x - 1)\\
&= -(x^2 + 2\cdot 2x + 4 - 5)\\
&= -((x+2)^2 - 5)\\
&= -(x+2)^2 + 5 \le 5\,!
\end{aligned}$$

Der Punkt $S(-2,5)$ heißt Scheitelpunkt dieser nach unten geöffneten Normalparabel!

b)

$$\begin{aligned}
y'(x) &= A - \frac{B}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; Ax^2 = B \\
&\Leftrightarrow\; Ax^2 - B = 0 \;\Leftrightarrow\; (\sqrt{A}x + \sqrt{B})(\sqrt{A}x - \sqrt{B}) = 0 \\
&\Leftrightarrow\; x_1 = -\sqrt{\frac{B}{A}}\,,\; x_2 = \sqrt{\frac{B}{A}}\,. \\
y''(x) &= \frac{2B}{x^3}\,. \\
y''\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right) &= \frac{2B \cdot A^{3/2}}{B^{3/2}} = 2\frac{A^{3/2}}{B^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{A^3}{B}} > 0\,. \\
y''\left(-\sqrt{\frac{B}{A}}\right) &= -\frac{2B \cdot A^{3/2}}{B^{3/2}} = -2\sqrt{\frac{A^3}{B}} < 0\,.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x) = Ax + \frac{B}{x}$ hat an der Stelle $x = -\sqrt{\frac{B}{A}}$ ein (lokales) Maximum mit dem Wert $y\left(-\sqrt{\frac{B}{A}}\right) = -\sqrt{AB} - \sqrt{AB} = -2\sqrt{AB}$ und an der Stelle $x = \sqrt{\frac{B}{A}}$ ein (lokales) Minimum mit dem Wert $y\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right) = \sqrt{AB} + \sqrt{AB} = 2\sqrt{AB}$.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie durch Polynomdivision ein quadratisches Polynom $q(x) = ax^2 + bx + c$, so dass gilt:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = (x-1) \cdot q(x)\,.$$

LÖSUNG:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 - 9x + 14) : (x - 1) \;=\; x^2 - 5x - 14 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -5x^2 - 9x + 14 \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad -14x + 14 \\
\qquad \underline{-(-14x + 14)} \\
\qquad\qquad 0\,!
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; p(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14 &= (x-1)\cdot(x^2 - 5x - 14) \\
&= (x-1)(x+2)(x-7)\,.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \text{Nullstellen von } p(x):\; x_1 = -2\,,\quad x_2 = 1\,,\quad x_3 = 7\,.$$