Aufgabe 9: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

definiert. Berechnen Sie die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Hypothese für eine nicht rekursive Formel zur Berechnung von a_{n+1} auf.

LÖSUNG:
$a_0 = 1$
$a_1 = a_0 + \frac{1}{3^{0+1}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
$a_2 = a_1 + \frac{1}{3^{1+1}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}$
$a_3 = 1_2 + \frac{1}{3^{2+1}} = \frac{13}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27}$
...

a_{n+1} läßt sich schreiben als:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Mit Hilfe der Geometrischen Reihe (vgl. Skript) läßt sich dies umschreiben zu

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3^{n+2}}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3^{n+1}}}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(3^{n+2} - 1\right)}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

Aufgabe 10: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$a_n + b_n \longrightarrow a + b.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{\substack{<\tilde{\epsilon} \\ \text{für } n > N'(\tilde{\epsilon})}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{<\tilde{\epsilon} \\ \text{für } n > N(\tilde{\epsilon})}} \\ &< 2\tilde{\epsilon} \quad \text{für} \quad n > \max\left(N'(\tilde{\epsilon}), N(\tilde{\epsilon})\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 11: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^{n} 3(k+1) = \frac{3}{2}(n+1)(n+2)$$

LÖSUNG:
Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$ ist die Formel korrekt:

$$\sum_{k=0}^{0} 3(k+1) = 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2$$

Induktionsannahme (IAn): Die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} 3(k+1) = \frac{3}{2}(n+1)(n+2)$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$
Behauptung: Die Formel ist korrekt für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3(k+1) = \frac{3}{2}(n+2)(n+3)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} 3(k+1) = \sum_{k=0}^{n} 3(k+1) + 3(n+2) &\overset{\text{(IAn)}}{=} \frac{3}{2}(n+1)(n+2) + 3(n+2) \\ &= \frac{3}{2}(n+2)\left((n+1)+2\right) = \frac{3}{2}(n+2)(n+3) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.