Aufgabe 12: Betrachten Sie die Folge

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

ii) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine konvergente Teilfolge. Geben Sie eine solche und ihren Grenzwert an.

LÖSUNG:

i)

$$|a_n| = \left|1 + \frac{1}{n}\right| \leq 2$$

ii)

$$a_{2k} = (-1)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

(vgl. Grenzwertsätze)

Aufgabe 13: Führen Sie die folgende Polynomdivision mit Rest durch, d.h. bestimmen Sie ein Polynom $q(x)$ mit

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = q(x)(x + 1) + c.$$

LÖSUNG: Wir werten das Polynom

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$$

an der Stelle $x_0 = -1$ mit dem Hornerschema aus:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & & -1 \\ & -1 & 4 & -4 & & 2 \\ \hline 1 & -4 & 4 & -2 & & 1 \end{array}$$

Wir erhalten somit

$$p(x) = (x + 1)(x^3 - 4x^2 + 4x - 2) + 1$$