Aufgabe 19: Stellen Sie die im Dezimalsystem gegebenen Zahlen $0,\overline{7}$ und $5,43\overline{21}$ unter Verwendung der Summenformel für unendliche geometrische Reihen als gemeine Brüche dar!

LÖSUNG: Es gilt unter Verwendung der Formel für die geometrische Reihe

$$0,\overline{7} = 7\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 7\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\Big) = 7\Big(\frac{10}{9} - 1\Big) = \frac{7}{9}$$

und analog

$$\begin{aligned} 5,43\overline{21} &= \frac{543}{100} + \frac{21}{100}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{543}{100} + \frac{21}{100}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\Big) \\ &= \frac{543}{100} + \frac{21}{100}\cdot\frac{1}{99} = \frac{17926}{3300} = \frac{8963}{1650} \end{aligned}$$

Aufgabe 20: Berechnen Sie $\nabla u(x,y,z) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\Big)$ für die Funktion $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen $\{(x,y,z) \mid u(x,y,z) = R\}$?

LÖSUNG: $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla u(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$u(x,y,z) = R \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2+z^2 = R^2$
Niveaumengen sind Kugeloberflächen mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius $R > 0$.