Aufgabe 26: Eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ ist (analog zum $\mathbb{R}^2$) gegeben durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $r \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ mittels

$$G = \{x + \alpha r \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, um den Schnitt von G mit einer Ebene

$$E = \{y + \beta p + \gamma q \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

für $y, p, q \in \mathbb{R}^3$, p und q linear unabhängig, zu berechnen.

b) Welche Fälle können hierbei auftreten?

c) Berechnen Sie den Schnitt von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher Fall aus b) ist das?

Lösung:

a) Da die Schnittmenge der Geraden G mit der Ebene E die Menge aller Punkte aus $\mathbb{R}^3$ ist, die sowohl auf der Gerade als auch in der Ebene liegen, können wir die Schnittmenge bestimmen, indem wir

$$x + \alpha r = y + \beta p + \gamma q$$

setzen und das sich daraus ergebene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha r_1 & - & \beta p_1 & - & \gamma q_1 & = & y_1 - x_1 \\ \alpha r_2 & - & \beta p_2 & - & \gamma q_2 & = & y_2 - x_2 \\ \alpha r_3 & - & \beta p_3 & - & \gamma q_3 & = & y_3 - x_3 \end{array}$$

lösen.

b) Möchte man den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene berechnen, so sind drei verschiedene Ergebnisse möglich:

i) Gerade und Ebene schneiden sich nicht, das heißt die Gerade liegt parallel zur Ebene.

ii) Die Gerade schneidet die Ebene, so dass die Schnittmenge aus einem Punkt besteht.

iii) Die Gerade liegt in der Ebene, so dass die Schnittmenge die Gerade selber ist.

c) In diesem konkreten Fall sieht das Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\
 & 4\alpha & - & 2\beta & - & 3\gamma & = & -1 \\
 & 3\alpha & - & \beta & - & 2\gamma & = & 0 \\
\hline
\Leftrightarrow & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\
 & & - & 6\beta & - & 3\gamma & = & -9 \\
 & & - & 4\beta & - & 2\gamma & = & -6 \\
\hline
\Leftrightarrow & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\
 & & & \beta & + & \frac{1}{2}\gamma & = & \frac{3}{2} \\
 & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \beta &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma \\
\alpha &= 2 - \beta = 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma
\end{aligned}$$

D.h. die Schnittmenge ist

$$\begin{aligned}
S &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

und somit eine Gerade. Genauer gesagt handelt es sich dabei um die Gerade G, die lediglich mit einem anderen Stütz- und Richtungsvektor aufgeschrieben worden ist.