Aufgabe 27: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion auf die Gerade

$$G = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Geben Sie die Matrixdarstellung bezüglich der Standard-Basis an.

b) Geben Sie Kern und Bild der Funktion f an.

LÖSUNG:

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Projektion auf eine Gerade gegeben ist durch

$$f(x) = x - (x \cdot n)n,$$

wobei n der Normalenvektor der Geraden ist. In unserem Fall gilt

$$n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ f(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = 0\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& 0 \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& -2x_2 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bild}(A) &= \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ es gibt } x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } Ax = b \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& b_1 \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 &=& b_2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 &=& b_1 \\ 0 &=& b_2 - 2b_1 \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \ \mathrm{Bild}(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \mid b_2 - 2b_1 = 0 \right\} = G
\end{aligned}
$$

Alternativ kann man das Bild von A auch wie folgt berechnen:

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\} = G
$$