Aufgabe 28: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination. Geben Sie die beim Lösen auftretenden Matrizen $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ an.

b) In der LR-Zerlegung (siehe Skript) treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(2)})^{-1}(L^{(1)})^{-1}$.

c) Wir definieren nun $R = L^{(2)}L^{(1)}A = A^{(3)}$. Rechnen Sie nach, dass $A = LR$ gilt.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$) und anschließendes Rückwärtseinsetzen ($Rx = y$).

LÖSUNG:

a) Die Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 6 & 2 & 2 & 16 \\ -3 & 8 & 3 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot(-2) & \cdot 1 \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{array}\right.}_{=L^{(1)}A} \left.\begin{array}{c} -4 \\ 24 \\ 18 \end{array}\right) \begin{array}{|c} \\ \cdot(-1) \\ \hookleftarrow + \end{array} \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right.}_{=L^{(2)}L^{(1)}A=R} \left.\begin{array}{c} -4 \\ 24 \\ -6 \end{array}\right)$$

(Die Bezeichnungen $L^{(2)}, L^{(1)}, R$ wurden hier für Teil b) schonmal notiert.) Rückwärtseinsetzen ergibt nun:

$$\begin{aligned} &-2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ &6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ &3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

b) Im ersten Gauß-Schritt wurde die erste Zeile mit -2 multipliziert und zur zweiten addiert, demnach steht in der Matrix $L^{(1)}$ in der zweiten Zeile in der ersten Spalte eine -2 und in der zweiten Spalte eine 1. Analog steht in der dritten Zeile der ersten Spalte eine 1, da die erste Zeile mit 1 multipliziert wird und zur dritten addiert wird. Analoges gilt für $L^{(2)}$ und wir erhalten

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind:

$$\left(L^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$L = \left(L^{(1)}\right)^{-1} \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrix $R = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ haben wir schon bei der Gauß-Elimination berechnet. Multiplizieren wir von links mit L erhalten wir wieder A:

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} = A$$

d) Vorwärtseinsetzen: $Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & y_1 = -4, \\ & 2y_1 + y_2 = 16 \Rightarrow y_2 = 24, \\ & -y_1 + y_2 + y_3 = 22 \Rightarrow y_3 = -6. \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen: $Rx = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & -2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ & 6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 29: Seien h_1, h_2, h_3 die unbekannten Höhen dreier Messpunkte über Normalhöhennull.

a) Durch Messungen haben Sie bestimmt:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= 45\,m \\ h_2 - h_3 &= -33\,m \\ h_3 - h_1 &= -12\,m \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Sie nur anhand dieser drei Messungen die drei Höhen h_1, h_2, h_3 *nicht* berechnen können.

b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, die drei Messungen seien:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= d_{12} \\ h_2 - h_3 &= d_{23} \\ h_3 - h_1 &= d_{31} \end{aligned}$$

Welche Bedingung müssen d_{12}, d_{23}, d_{31} erfüllen, damit mindestens eine Lösung h_1, h_2, h_3 existiert, die alle drei Gleichungen erfüllt?

LÖSUNG:

a) Das gegebene Gleichungssystem läßt sich umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Algorithmus formen wir das Gleichungssystem um

$$\begin{array}{rrr|rl}
1 & -1 & 0 & 45 & \quad | \cdot 1 \\
0 & 1 & -1 & -33 & \\
-1 & 0 & 1 & -12 & \quad \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & 45 & \\
0 & 1 & -1 & -33 & \quad | \cdot 1 \\
0 & -1 & 1 & 33 & \quad \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & 45 & \\
0 & 1 & -1 & -33 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

und stellen fest, dass das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist. Der Rang der Matrix ist 2.

<u>Alternative:</u> Geht man davon aus, dass h_1, h_2, h_3 eine Lösung ist, so ist $h_1 + h, h_2 + h, h_3 + h$ mit beliebigem $h \in \mathbb{R}$ eine weitere Lösung. Dies läßt sich ganz einfach nachrechnen und auch so kann man zeigen, dass das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist.

b) Um die Bedingung an d_{12}, d_{23} und d_{31} besser ablesen zu können, führen wir den Gauß-Algorithmus noch einmal mit allgemeiner rechter Seite durch

$$\begin{array}{rrr|ll}
1 & -1 & 0 & d_{12} & \quad | \cdot 1 \\
0 & 1 & -1 & d_{23} & \\
-1 & 0 & 1 & d_{31} & \quad \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & d_{12} & \\
0 & 1 & -1 & d_{23} & \quad | \cdot 1 \\
0 & -1 & 1 & d_{31} + d_{12} & \quad \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -1 & 0 & d_{12} & \\
0 & 1 & -1 & d_{23} & \\
0 & 0 & 0 & d_{31} + d_{12} + d_{23} &
\end{array}$$

An der dritten Zeile sieht man, dass $d_{12} + d_{23} + d_{31} = 0$ sein muss.