Anwesenheitsübungen zur Ingenieur-Mathematik I **WS 2016/2017**
Blatt 12 **23.01.-27.01.2017**

Aufgabe 30: Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir lösen diese Aufgabe mittels des Gauß-Jordan-Algorithmus. Dieser ist eine Erweiterung des Gauß-Algorithmus. Anstatt die Matrix in eine Dreieckform zu bringen wird die Matrix in Diagonalform umgewandelt. Zusätzlich setzen wir als rechte Seite die Einheitsmatrix. Dann gilt:

$$\begin{array}{rrr|rrr|ll}
2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot\frac{1}{2} & \\
4 & 9 & -4 & 0 & 1 & 0 & & \\
-2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdot(-4) & \cdot(2) \\
4 & 9 & -4 & 0 & 1 & 0 & \hookleftarrow + & \\
-2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & \cdot\frac{1}{3} & \\
0 & 9 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot(-9) & \\
0 & 9 & 1 & 1 & 0 & 1 & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & \cdot(1) & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{6}{2} & 1 & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot -\frac{3}{2} & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & 1 & & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & & \\
\hline
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 31: a) Jedes lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.

ja ☐ nein ☐

b) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.

ja ☐ nein ☐

c) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens zwei Lösungen.

ja ☐ nein ☐

d) Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$, das mindestens zwei Lösungen hat, hat unendlich viele. ja ☐ nein ☐

e) Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem hat höchstens eine Lösung.

ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: a) nein! Gegenbeispiel: $x_1 + x_2 = 1 \wedge x_1 + x_2 = 2$ besitzt keine Lösung.
b) ja, die triviale Lösung.
c) nein! Gegenbeispiel: $\mathbf{A}$ invertierbare Matrix $\Rightarrow$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ besitzt nur die triviale Lösung.
d) ja, da jede Linearkombination beider Lösungen wieder Lösung ist.
e) nein! Besitzt das zugehörige homogene System eine nichttriviale Lösung, so kann man durch Linearkombination unendlich viele Lösungen erzeugen.
Beispiel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{Ax} &= \mathbf{0} \text{ besitzt die nichttriviale Lösung } \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \text{ besitzt die spezielle Lösung } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Lösung für alle } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$