Aufgabe 33: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &:= \max(|x_1|,|x_2|) \\ &= \frac{1}{2}(|x_1|+|x_2|+||x_1|-|x_2||) \quad \text{und} \\ g(x_1,x_2) &:= |x_1|+|x_2| \,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen und beschreiben Sie die Niveaumengen

$$\begin{aligned} N_r(f) &:= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x_1,x_2)=r\} \quad \text{und} \\ N_r(g) &:= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x_1,x_2)=r\} \,. \end{aligned}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze einiger Niveaumengen an.
b) Bestimmen und beschreiben Sie den Graphen der Funktionen f und g. Skizzieren Sie die Graphen ebenfalls.
c) In welchen Punkten sind die Funktionen f, g differenzierbar bzw. in welchen Punkten sind sie nicht differenzierbar?
Tipp: Man kann dies anhand des jeweiligen Graphen erkennen!

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} N_r(f) &= \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x_1,x_2)=r\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \max(|x_1|,|x_2|)=r\right\} \end{aligned}$$

$r<0$: $N_r(f)=\emptyset$
$r=0$: $N_r(f)=\{(0,0)\}$ (klar!)
$r>0$: Fall 1: $\max(|x_1|,|x_2|)=|x_2|=r$
d.h. $x_2=r$ oder $x_2=-r$ und $-r\le x_1\le r$
wegen $|x_1|\le|x_2|=r$
Fall 2: $\max(|x_1|,|x_2|)=|x_1|=r$
$\Rightarrow$ $x_1=r$ oder $x_1=-r$ und $x_2\in[-r,r]$!

$$\begin{aligned} N_r(f) = \{ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid\ & (x_1\in[-r,r] \text{ und } x_2=r) \\ & \text{oder } (x_1\in[-r,r] \text{ und } x_2=-r) \\ & \text{oder } (x_1=r \text{ und } x_2\in[-r,r]) \\ & \text{oder } (x_1=-r \text{ und } x_2\in[-r,r]) \} \end{aligned}$$

Es handelt sich also um den Rand eines Quadrates mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Seitenlänge $2r$!
Eckpunkte in: $(r,r), (-r,r), (-r,-r), (r,-r)$.

$$N_r(g)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \ :\ \underbrace{|x_1|+|x_2|}_{g(x_1,x_2)}=r\}$$

$r < 0$: $N_r(g) = \emptyset$

$r = 0$: $N_r(g) = \{(0,0)\}$

$r > 0$: Fall 1: $x_1, x_2 \geq 0$

$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2 = r - x_1}$

Gerade durch $(0, r)$ und $(r, 0)$

Fall 2: $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$

$g(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 = r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2 = r + x_1}$

Gerade durch $(0, r)$ und $(-r, 0)$

Fall 3: $x_1, x_2 \leq 0$

$g(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 = r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2 = -r - x_1}$

Gerade durch $(0, -r)$ und $(-r, 0)$

Fall 4: $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$

$g(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = r \;\Leftrightarrow\; \boxed{x_2 = -r + x_1}$

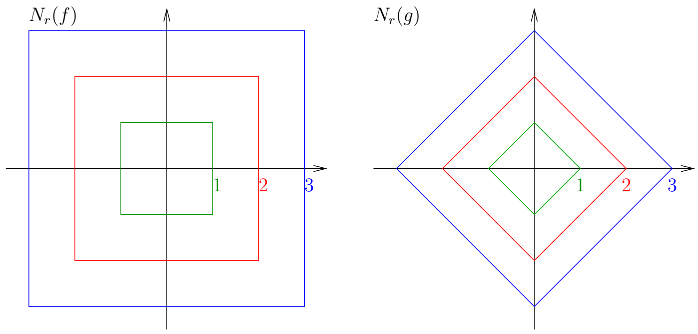
Gerade durch $(0, -r)$ und $(r, 0)$

Es handelt sich also um den Rand eines Quadrates: Mittelpunkt $(0, 0)$, Seitenlänge $\sqrt{2}r$

Eckpunkte in $(0, r), (-r, 0), (0, -r), (r, 0)$

(gedrehtes und skaliertes Quadrat gegenüber f, wenn man gleichen Wert für r wählt!)

Links sind die Niveaumengen $N_r(f)$ für $r = 1, 2, 3$ abgebildet und rechts die Niveaumengen $N_r(g)$ für $r = 1, 2, 3$:



b) Graph von f:

$$G_f := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = f(x_1, x_2)\}$$

setzt sich aus Niveaumengen $N_r(f)$ (=„Höhenlinien“) zusammen:

Aus Aufgabenteil a) wissen wir, dass nur Niveaumengen mit $r \geq 0$ Sinn ergeben, d.h. für x_3 muss gelten $x_3 \geq 0$!

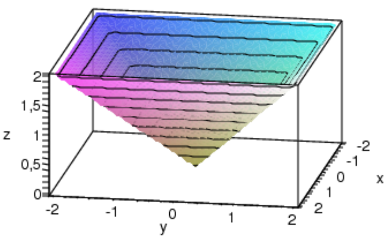
Des weiteren wissen wir, dass eine Niveaumenge $N_r(f)$ einem Schnitt einer Ebene, parallel zur $x_1 - x_2$ Ebene in der Höhe $r > 0$ mit G_f entspricht. Dieser Schnitt entspricht dem Rand eines Quadrates mit Seitenlänge $2r$. Der Graph von f ist also eine auf dem Kopf stehende Pyramide mit Spitze in $(0, 0, 0)$.

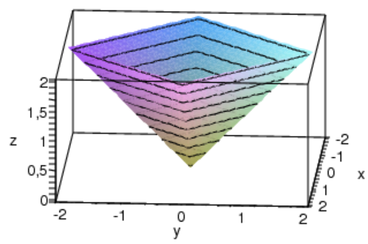
Der Graph von g sieht ähnlich aus, wie der Graph von f. Es ist ebenfalls eine auf dem Kopf stehende Pyramide mit Spitze in $(0, 0, 0)$, die im Vergleich zum

Graph von f um $45°$ $(= \pi/4)$ gedreht und zusätzlich skaliert ist. Die Seitenlänge dieser Pyramide ist kürzer.

Man beachte: Wenn $x \in \mathbb{R}^3$ auf der „Mantelfläche" von Graph f bzw. g liegt, dann liegt λx für $\lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls auf der Mantelfläche und damit auf Graph f bzw. g (Kegeleigenschaft!)

Links ist der Graph der Funktion $f(x_1, x_2)$ abgebildet und rechts der Graph der Funktion $g(x_1, x_2)$:





c) <u>Nicht</u> partiell differenzierbar und damit auch nicht total differenzierbar ist f in den Punkten, die eine „Kante" von Graph f sind/bilden:

$$|x_1| = |x_2| \iff x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 = -x_2$$

<u>Fall 1:</u> $x_1, x_2 \geq 0$ und $x_1 = x_2$
wähle $0 \leq h \leq x_1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 = x_2 \\
&h \geq 0 \ \Rightarrow \ x_1 + h \geq x_2 \geq 0 \\
&\Rightarrow \ f(x + he_1) = f(x_1 + h, x_2) = x_1 + h \\
&\Rightarrow \ f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2) = x_1 + h - x_1 = h \\
&\Rightarrow \ (f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)) \cdot \frac{1}{h} = 1 \to 1 \quad (h \to 0!) \\
&0 \leq h \leq x_1 \ \Rightarrow \ x_2 \geq x_1 - h \geq 0 \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{h}(f(x_1 - h, x_2) - f(x_1, x_2)) = \frac{1}{h}(x_2 - x_2) = 0 \to 0 (h \to 0!)
\end{aligned}$$

Der „Grenzwert" ist von der einen Seite also 1 und von der anderen Seite 0
$\leadsto$ nicht differenzierbar!

<u>Fall 2:</u> $x_1 = x_2$ und $0 \geq x_1, x_2$ entsprechend!

<u>Fall 3:</u> $x_1 = -x_2$ und $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$ entsprechend!

<u>Fall 4:</u> $x_1 = -x_2$ und $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ entsprechend!

<u>Nicht</u> partiell (nach beiden Variablen) differenzierbar und damit auch nicht total differenzierbar ist g in den Punkten der Menge

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}.$$

Für beliebiges, festes $x_2 = c$ ist hat die Schnittfunktion in Abhängigkeit von x_1 die Darstellung $g(x_1) = |x_1| + c$, welche an der Stelle $x_1 = 0$ nicht nach x_1 differenzierbar ist.

Für beliebiges, festes $x_1 = c$ ist hat die Schnittfunktion in Abhängigkeit von x_2 die Darstellung $g(x_2) = c + |x_2|$, welche an der Stelle $x_2 = 0$ nicht nach x_2 differenzierbar ist.

Daraus folgt, dass g an einer Stelle der Form $(x_1, 0)$ nicht partiell nach der zweiten Variablen differenzierbar ist und an einer Stelle der Form $(0, x_2)$ nicht partiell nach der ersten Variablen differenzierbar ist.