Aufgabe 1: a) Funktioniert die Formel für die Höhenfunktion $h(d, \alpha) = d \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)$ aus der Vorlesung auch dann, wenn man direkt am Turm steht?

b) Wie verhält sich die Sensitivität bezüglich Abweichungen in d und α, wenn man sehr nah am Turm steht?

c) Wie verhält sich die Sensitivität bezüglich Abweichungen in α, wenn man sehr weit entfernt steht?

LÖSUNG:

a) Steht man direkt am Turm, so ist $d = 0$ und $\alpha = 90$. Da

$$h(0, 90) = 0 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \infty,$$

funktioniert die Formel für die Höhenfunktion in diesem Fall nicht.

b) Die Sensitivität einer Funktion wird durch den Betrag ihrer Ableitung wiedergespiegelt. Je höher der Betrag der Ableitung ist, desto höher ist die Sensitivität in diesem Punkt. Wir müssen also überprüfen, wie sich die Ableitung betragsmäßig verhält. Es gilt:

$$\frac{dh}{dd} = \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right), \qquad \frac{dh}{d\alpha} = \frac{d\pi}{180\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)}$$

Steht man nun nah am Turm, so ist α nur wenig kleiner als 90°, d.h. $\frac{dh}{dd}$ ist sehr groß, denn für $x < \frac{\pi}{2}$, $x \to \frac{\pi}{2}$ gilt $\tan(x) \to \infty$. Mit anderen Worten, die Sensitivität bzgl. Abweichungen in d ist sehr groß. Außerdem gilt für $x < \frac{\pi}{2}$, $x \to \frac{\pi}{2}$ $\cos(x) \to 0$, so dass die Sensitivität bzgl. Abweichungen in α ebenfalls sehr groß ist.

c) Steht man sehr weit entfernt vom Turm, so ist d sehr groß und α sehr klein (fast null). Da für $x \to 0$ $\cos(x) \to 1$ gilt, d jedoch sehr groß ist, ist die Sensitivität bzgl. Abweichungen in α groß.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Summen:

a)
$$\sum_{i=1}^{10}(a_i - a_{i+1}),$$

b)
$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} a_{i,2j}.$$

LÖSUNG:

a) $\sum_{i=1}^{10}(a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{10} a_i - \sum_{i=1}^{10} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{10} a_i - \sum_{i=2}^{11} a_i = a_1 - a_{11}$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} a_{i,2j} &= \sum_{i=1}^{10}(\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{5} a_{i,2j}) \\ &= \sum_{i=1}^{10}(\sum_{j=1}^{5} a_{i,2j-1})\end{aligned}$$

Aufgabe 3: a) Skizzieren Sie zuerst den Graphen der folgenden Funktion und schreiben Sie die Funktion ohne Betragsfunktion mit Fallunterscheidung:

$$f(x) := x + |x|$$

b) Skizzieren Sie nun den Graph der Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & : \quad x > 1 \end{cases}$$

und schreiben Sie die Funktion unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung.

c) Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion und schreiben Sie auch diese unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung:

$$h(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x < -1 \\ 2x+2 & : \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$$

LÖSUNG:

a) $f(x) = x + |x| = x + \left\{ \begin{array}{rcl} x & : & x > 0 \\ -x & : & x \leq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & : & x > 0 \\ 0 & : & x \leq 0 \end{array} \right.$

b) Im Gegenssatz zu der Funktion aus dem Aufgabenteil a) ist die Funktion $g(x)$ auf der x-Achse um eins nach rechts verschoben und zusätzlich mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ skaliert. Daher gilt

$g(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & : \quad x > 1 \end{cases} = \frac{1}{4}\left(x - 1 + |x-1|\right)$

c) Um die Funktion $h(x)$ umzuschreiben betrachten wir zunächst die Funktion

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -1 \\ 2x+2 & : \quad x \geq -1 \end{cases},$$

die für $x \leq 0$ mit der Funtion $h(x)$ übereinstimmt. $h_1(x)$ läßt sich ähnlich wie die Funktion $g(x)$ durch Verschiebung von $f(x)$ konstruieren. Es gilt also

$$h_1(x) = x + 1 + |x+1|.$$

Um den zweiten Knick zu konstruieren addieren wir ein Vielfaches der Funktion $f(x)$ zu $h_1(x)$. Da $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ ändert dies nichts am Verhalten von $h_1(x)$ für $x \leq 0$. Wählen wir als Faktor -1, so ändert sich aber die Steigung für $x > 0$

von 2 auf 0, da die Steigung von $f(x)$ für $x > 0$ gleich 2 ist. Die Funktion $h(x)$ läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned} h(x) &= g_1(x) + (-1) \cdot f(x) \\ &= x + 1 + |x+1| - (x + |x|) \\ &= 1 + |x+1| - |x| \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie das quadratische Polynom, auf dessen Graph die Punkte $(-1, 0)$, $(1, 2)$ und $(-2, -7)$ liegen.

LÖSUNG: Die Lösung lautet:

$$p(x) = -2x^2 + x + 3\,.$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-2) \cdot 1 + (-1) + 3 = -2 - 1 + 3 = 0 \quad \checkmark \\ p(1) &= -2 + 1 + 3 = -2 + 4 = 2 \quad \checkmark \\ p(-2) &= (-2) \cdot 4 + (-2) + 3 = -8 - 2 + 3 = -10 + 3 = -7 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Wie findet man die Lösung?
<u>Ansatz:</u> $p(x) = ax^2 + bx + c$
Bedingungen:

$$\begin{array}{lrl} 1) & 0 = p(-1) = & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c \\ 2) & 2 = p(1) \;\; = & a + b + c \\ 3) & -7 = p(-2) = & 4a - 2b + c \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem:

I:	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II:	a	$+$	b	$+$	c	$=$	2
III:	$4a$	$-$	$2b$	$+$	c	$=$	-7
I'=I:	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II'=II+I:	$2a$			$+$	$2c$	$=$	2
III'=III+2II	$6a$			$+$	$3c$	$=$	-3
I"=I':	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II"=$\frac{1}{2}$II':	a			$+$	c	$=$	1
III"=$\frac{1}{3}$III':	$2a$			$+$	c	$=$	-1
I"'=I":	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II"'=II":	a			$+$	c	$=$	1
III"'=III"-II":	a					$=$	-2

$$a = -2 \;\Rightarrow\; c = 1 - a = 1 + 2 = 3 \;\Rightarrow\; b = a + c = -2 + 3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = -2x^2 + x + 3}$$