Aufgabe 5: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$;

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

d) $n! \geq 2^{n-1}$.

Aufgabe 6: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$;

b) $a_n := \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$;

c) $a_n := (1+\frac{1}{n^2})^n$;

Tipp: Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung einmal auf a_n und einmal auf $\frac{1}{a_n}$ an und zeigen Sie damit, dass

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

und

$$a_n \leq 1 + \frac{n}{n^2-n+1}$$

gelten.

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser beiden Folgen.

d) $a_n := \frac{n}{2n+\sin(\frac{1}{n})}$.

Aufgabe 7: Die Zahlenfolge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 2n + 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man gebe eine explizite Formel für das allgemeine Glied der Folge an und beweise diese Formel!