Aufgabe 5: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

d) $n! \geq 2^{n-1}$.

LÖSUNG:

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ ist die Formel richtig:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \quad \checkmark .$$

Induktionsannahme (IAn): Die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$
Beh.: Die Formel ist richtig für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) .$$

Bew.:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{(IAn)}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1) \cdot (n+2) \quad \checkmark . \end{aligned}$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

b) (IA): $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1}{6} 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \checkmark .$$

(IAn): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Bew.:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1) \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{1}{6}(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad \checkmark.
\end{aligned}$$

c) (IA): Für $n = 4$:

$$4^2 = 16 \leq 16 = 2^4 \quad \checkmark.$$

(IAn): $n^2 \leq 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}^{\geq 4}$
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$$

Bew.:
Für $n \geq 4$ gilt:

$$4n \leq n^2 \;\Leftrightarrow\; 4 \leq n$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + \frac{n^2}{2} + 1 \\
&\overset{\text{(IAn)}}{\leq} 2^n + 2^{n-1} + 1 \\
&\leq 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-1} \\
&= 2^{n-1}(2+1+1) = 2^{n-1} \cdot 4 = 2^{n-1} \cdot 2^2 = 2^{n+1} \quad \checkmark.
\end{aligned}$$

d) (IA) Für $n = 1$ ist die Formel richtig:

$$1! = 1 \geq 2^{1-1} = 1$$

.

(IAn) Die Formel

$$k! \geq 2^{k-1}$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.
(IS) Die Formel ist richtig für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)! \geq 2^k$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
2^k = 2^{k-1} \cdot 2 &\leq k! \cdot 2 \\
&\overset{k \geq 1}{\leq} k! \cdot (k+1) \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$;

b) $a_n := \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$;

c) $a_n := (1+\frac{1}{n^2})^n$;

Tipp: Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung einmal auf a_n und einmal auf $\frac{1}{a_n}$ an und zeigen Sie damit, dass

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

und

$$a_n \leq 1 + \frac{n}{n^2-n+1}$$

gelten.

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser beiden Folgen.

d) $a_n := \frac{n}{2n+\sin(\frac{1}{n})}$.

LÖSUNG:

a)

$$a_n = \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5} = \frac{n^2(-7+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(5+\frac{5}{n^2})} = \frac{-7+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{5}{n^2}} \to -\frac{7}{5}$$

für $n \to +\infty$, da $\frac{3}{n}, -\frac{1}{n^2}, \frac{5}{n^2} \to 0$ für $n \to +\infty$.

b)

$$a_n = \frac{n^3(3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3})}{n^3(2+\frac{1}{\sqrt{n}})^3} = \frac{3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{(2+\frac{1}{\sqrt{n}})^3} \to \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

für $n \to +\infty$, da $\frac{1}{n^2}, -\frac{2}{n^3}, \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to +\infty$.

c) <u>Beh.:</u> $a_n = (1+\frac{1}{n^2})^n \to 1$ für $n \to +\infty$.
<u>Beweis:</u> Wegen der Bernoulli-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n^2})^n \geq 1 + n\cdot\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{n} \\
\Rightarrow \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n} = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n \\
&= \left(\frac{n^2+1-1}{n^2+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2-n+1}{n^2+1} \\
\Rightarrow a_n &\leq \frac{n^2+1}{n^2-n+1} = \frac{n^2-n+1+n}{n^2-n+1} = 1+\frac{n}{n^2-n+1}
\end{aligned}$$

D.h. also : $a_n = (1+1/n^2)^n \to 1$ für $n \to +\infty$, da sowohl $1+\frac{1}{n} \to 1$ als auch $1+\frac{n}{n^2-n+1} \to 1$.

d)

$$a_n = \frac{n}{2n+\sin(\frac{1}{n})} = \frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})\right)} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to +\infty$, da $\frac{1}{n} \to 0$ und $\sin(\frac{1}{n}) \to 0$ für $n \to +\infty$ und somit auch $\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}) \to 0$ für $n \to +\infty$.

Aufgabe 7: Die Zahlenfolge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 2n + 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man gebe eine explizite Formel für das allgemeine Glied der Folge an und beweise diese Formel!

Lösung: Die Lösung ist

$$a_n = (n+1)^2.$$

Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion über n.

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$ ist die Formel richtig:

$$a_0 = (0+1)^2 = 1$$

Induktionsannahme (IAn): Die Formel

$$a_n = (n+1)^2$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$
Beh.: Die Formel ist richtig für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = (n+2)^2$$

Bew.:

$$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) + 1 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.