Aufgabe 8: Für das Polynom $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$ berechne man mittels HORNER-Schema den Wert $p(-1)$ sowie die Zerlegung in Linearfaktoren. Welches sind die Nullstellen von p?

LÖSUNG: Wir werten das Polynom

$$p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$$

an der Stelle $x_0 = -1$ mit dem Hornerschema aus:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & -10 & 12 \\ & -2 & 6 & 4 \\ \hline 2 & -6 & -4 & 16 \end{array}$$

Wir erhalten somit

$$p(x) = (x+1)(2x^2 - 6x - 4) + 16$$

und damit $p(-1) = 16$.
Eine Nullstelle $x = 1$ sieht man mit Hingucken. Hornerschema mit $x = 1$ ergibt dann

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & -10 & 12 \\ & 2 & -2 & -12 \\ \hline 2 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

und folglich $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = (x-1)(2x^2 - 2x - 12)$. Die Nullstellen von $2x^2 - 2x - 12$ sind die Nullstellen von $x^2 - x - 6$ und damit

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

Damit gilt $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$. Es folgt also

$$p(x) = 2(x-1)(x-3)(x+2)$$

Aufgabe 9: Sind die folgenden Funktionen stetig auf ihrem Definitionsgebiet?

a) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & , \text{auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & , \text{für } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

c) $f(x) = |x-1| + |x+1|$ auf $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ auf $\mathbb{R}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1 & , x \leq 2 \\ -\frac{x^3}{4} + 3 & , x > 2 \end{cases}$ auf $\mathbb{R}$

LÖSUNG:

a) Ja! Die Cosinus-Funktion sowie die Funktionen $\frac{1}{x}$ und x^2 sind stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Da die Verkettung sowie das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, ist $\cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2$

stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir müssen also schauen, ob die Funktion $f(x)$ stetig in $x = 0$ ist. Dazu betrachten wir den Grenzwert von $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2$ für $x \to 0$.

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \leq x^2 \to 0 \quad \text{für } x \to 0,$$

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \geq -x^2 \to 0 \quad \text{für } x \to 0.$$

D.h. $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \to 0$ für $x \to 0$ und somit ist die Funktion $f(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Ja! Zunächst wissen wir, dass x^2 und $1 - x$ stetig sind. Ihr Nullstellenmengen sind $N_{x^2} = \{0\}$ und $N_{1-x} = \{1\}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{1}{x^2}$ stetig ist auf $\mathbb{R}\backslash N_{x^2}$ und $\frac{1}{1-x}$ stetig ist auf $\mathbb{R}\backslash N_{1-x}$. Da sie Summe zweier stetiger Funktionen auch stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.

c) Ja! Da die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist und die Summe zweier stetiger Funktionen auch wieder stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

d) Ja! $f(x)$ läßt sich umschreiben zu

$$f(x) = \sqrt[4]{|x|} = \sqrt{\sqrt{|x|}}.$$

Die Betragsfunktion ist auf $\mathbb{R}$ stetig und bildet auf $\mathbb{R}_0^+$ ab. Da die Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}_0^+$ stetig ist und die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

e) Ja! $\frac{x^2}{2} - 1$ und $-\frac{x^3}{4} + 3$ sind stetig auf $\mathbb{R}$. Da

$$\frac{2^2}{2} - 1 = 1 = -\frac{2^3}{4} + 3$$

besitzt die Funktion $f(x)$ keinen Sprung an der Stelle $x = 2$ und ist somit stetig.

Aufgabe 10: Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, \qquad \text{b) } g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{x^2 - 5}{(x - 1)^2}, \qquad \text{d) } k(x) = \frac{2x - 2}{|2x - 2|}.$$

LÖSUNG:

a) Es gilt:

$$x^2 - 3\,x + 2 = (x - 1)\,(x - 2)$$

und daher

$$\frac{x^2 - 3\,x + 2}{x - 1} \overset{x \neq 1}{=} x - 2 \to -1 \quad \text{für } x \to 1.$$

Also ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzbar mit dem Funktionswert

$$f(1) := -1!$$

b) Wir beachten, dass

$$x - 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)$$

gilt und erhalten daher

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \overset{x\neq 1}{=} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \quad \to \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2} \qquad \text{für } \; x \to 1.$$

Also ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzbar mit dem Funktionswert

$$g(1) := \frac{1}{2}.$$

c) Hier gilt:

$$\frac{x^2-5}{(x-1)^2} = \frac{x-\sqrt{5}}{x-1} \cdot \frac{x+\sqrt{5}}{x-1}.$$

Für $x \downarrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n := 1 + \frac{1}{n}$) ergibt sich:

$$\frac{x-\sqrt{5}}{x-1} \to -\infty \tag{1}$$

$$\frac{x+\sqrt{5}}{x-1} \to +\infty, \tag{2}$$

(1) und (2) ergeben zusammen

$$\frac{x^2-5}{(x-1)^2} \quad \to -\infty \qquad \text{für } \; x \downarrow 1.$$

Für $x \uparrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n := 1 - \frac{1}{n}$) ergibt sich dagegen:

$$\frac{x-\sqrt{5}}{x-1} \to +\infty \tag{3}$$

$$\frac{x+\sqrt{5}}{x-1} \to -\infty, \tag{4}$$

(3) und (4) ergeben zusammen

$$\frac{x^2-5}{(x-1)^2} \quad \to -\infty \qquad \text{für } \; x \uparrow 1.$$

Also ist die Funktion $h(x)$ an der Stelle $x = 1$ <u>nicht</u> stetig ergänzbar. Als Funktionswert ergäbe sich (die Formel ist formal, d.h. symbolisch zu verstehen):

$$h(1) = \frac{-4}{0} = -\infty.$$

Man sagt, die Funktion $h(x)$ besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

d) Die Funktion $k(x) = \dfrac{2x-2}{|2x-2|} = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{array} \right\}$ ist stetig für $x \neq 1$ und hat an der Stelle $x = 1$ eine Sprungstelle mit einem Sprung der Höhe 2 von -1 auf $+1$ als Unstetigkeit. Sie ist an der Stelle $x = 1$ also nicht stetig ergänzbar.
$\to$ Skizze anfertigen!