Aufgabe 11: $(f_n)_n$ sei rekursiv definiert durch $f_1 = a$, $f_{n+1} = a + f_n^2$ mit $a = \frac{3}{16}$. Wir wollen nun den Grenzwert bestimmen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

a) Man berechne die ersten fünf Folgenglieder.

b) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Folge durch $\frac{1}{4}$ nach oben beschränkt ist.

c) Man zeige, dass die Folge monoton wachsend ist.
Tipp: Zeigen Sie $f_{n+1} - f_n > 0$.

d) Man zeige, dass f_n einen Grenzwert besitzt und berechne diesen.

Aufgabe 12: Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n} \quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^k} \quad e)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Tipp: Zeigen Sie $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$ für alle $n \geq 1$

Aufgabe 13: Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

a) $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$,

b) $B = \{x \mid x^2 < 5\}$,

c) $C = \{x \mid 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$.

Welche Mengen haben ein Maximum bzw. ein Minimum? Schreiben Sie die Mengen jeweils als Intervall.

Aufgabe 14: Wie muss a gewählt werden, damit gilt:

$$(2+h)^3 = 2^3 + ah + o(h) \quad \text{mit} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0\,?$$