Aufgabe 11: $(f_n)_n$ sei rekursiv definiert durch $f_1 = a$, $f_{n+1} = a + f_n^2$ mit $a = \frac{3}{16}$. Wir wollen nun den Grenzwert bestimmen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

a) Man berechne die ersten fünf Folgenglieder.

b) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass die Folge durch $\frac{1}{4}$ nach oben beschränkt ist.

c) Man zeige, dass die Folge monoton wachsend ist.
Tipp: Zeigen Sie $f_{n+1} - f_n > 0$.

d) Man zeige, dass f_n einen Grenzwert besitzt und berechne diesen.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{3}{2^4} = 0{,}1875 \\
f_2 &= \frac{3}{2^4} + \frac{3^2}{2^8} = \frac{3\ 2^4 + 3^2}{2^8} = \frac{57}{2^8} \approx 0{,}22265625 \\
f_3 &= \frac{3}{2^4} + \frac{57^2}{2^{16}} = \frac{3\ 2^{12} + 57^2}{2^{16}} = \frac{15537}{2^{16}} \approx 0{,}23707580 \\
f_4 &= \frac{3}{2^4} + \frac{15537^2}{2^{32}} = \frac{3\ 2^{28} + 15537^2}{2^{32}} = \frac{1046704737}{2^{32}} \approx 0{,}24370493 \\
f_5 &= \frac{3}{2^4} + \frac{1046704737^2}{2^{64}} = \frac{3\ 2^{60} + 1046704737^2}{2^{64}} \approx 0{,}24689209
\end{aligned}$$

b) (IA): Für $n = 1$:

$$f_1 = \frac{3}{16} < \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \checkmark.$$

(IAn): $f_n < \frac{1}{4}$ für ein $n \in \mathbb{N}$
(IS): $n \rightsquigarrow n + 1$:
Beh.: $f_{n+1} < \frac{1}{4}$
Bew.:

$$f_{n+1} = \frac{3}{16} + f_n^2 \overset{\text{(IAn)}}{<} \frac{3}{16} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

c) Man betrachte die Differenz $f_{n+1} - f_n$ und zeige, dass diese größer als 0 ist:

$$f_{n+1} - f_n = f_n^2 - f_n + \frac{3}{16} = \left(f_n - \frac{1}{4}\right)\left(f_n - \frac{3}{4}\right)$$

Nach Aufgabenteil b) sind nun die beide Terme in den Klammern kleiner als 0 und somit ist das Produkt größer als 0.

d) Die Folge ist nach oben beschränkt und zudem (strikt) monoton wachsend. Somit besitzt sie einen Grenzwert (Satz aus der Vorlesung). Es gilt also $\lim_{n\to\infty} f_n =$

$\bar{f}$ und somit:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} f_n^2 + \frac{3}{16} \\ \Leftrightarrow \qquad \bar{f} &= \bar{f}^2 + \frac{3}{16} \\ \Leftrightarrow \left(\bar{f} - \frac{1}{4}\right)\left(\bar{f} - \frac{3}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen dieser Gleichung sind $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, wobei zweitere nach Aufgabenteil b) ausscheidet.

Aufgabe 12: Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n} \quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^k} \quad e)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Tipp: Zeigen Sie $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$ für alle $n \geq 1$

LÖSUNG:

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Die Reihe lässt sich also nach unten durch die harmonische Reihe abschätzen und ist somit genau wie diese divergent.

b) In dieser Aufgabe greifen wir auf den gegebenen Tipp zurück. Dafür formen wir ihn wie folgt um:

$$\begin{aligned} n! &\leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n \qquad \forall n \geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{n!}{n^n} &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Nun beweisen wie dies per vollständiger Induktion:
(IA): $n = 1$:

$$1 = \frac{1!}{1^1} \leq \frac{1}{2^0} = 1 \quad \checkmark.$$

(IAn): $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \leq \frac{1}{2^n}$$

Bew.:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{(n+1)n!}{n^n} \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} \overset{\text{(IAn)}}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \leq \frac{1}{2^n}$$

Damit gilt für die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Die geometrische Reihe ist eine Majorante und somit konvergiert die betrachtete Reihe.

c) Verwende das Quotientenkriterium:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}} \frac{10^n}{n^{10}} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} < 0{,}95 \quad \forall n \geq 4$$

Somit konvergiert die Reihe.

d) Es handelt sich hierbei um die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ für $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Nach Satz 1.14 aus dem Skript konvergiert die Reihe somit gegen $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1$. Das erste Glied der Reihe (also 1) muss abgezogen werden, da der Grenzwert aus Satz 1.14 für $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ gilt.

e) Wir stellen fest, dass alle Folgenglieder > 0 sind und verwenden das Quotientenkriterium:

$$\frac{\left|\frac{x^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}\right|}{\left|\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|} = \frac{x^{2(k+1)+1}}{x^{2k+1}} \frac{(2k+1)!}{(2(k+1)+1)!} = \frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)} \leq q < 1\,,$$

für ein hinreichend großes k. Somit konvergiert die Reihe.

Aufgabe 13: Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

a) $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$,

b) $B = \{x \mid x^2 < 5\}$,

c) $C = \{x \mid 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$.

Welche Mengen haben ein Maximum bzw. ein Minimum? Schreiben Sie die Mengen jeweils als Intervall.

LÖSUNG:

a) Für die Menge $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$ gilt:

$$\sup A = 5 = \max A$$

und

$$\inf A = -2,$$

aber -2 ist kein Minimum von A. Zur Begründung beachten wir, dass nach Definition der Menge A gilt:

$$x \leq 5 \quad \text{für alle } x \in A.$$

D. h. 5 ist obere Schranke von A. Ausserdem gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in A$ derart, dass

$$5 - \varepsilon \leq x \leq 5.$$

Denn wir können ja zum Beispiel $x = 5 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ wählen, um die gewünschte Ungleichung zu erhalten. Also ist 5 kleinste obere Schranke von A. Da $5 \in A$, gilt demnach sogar

$$\max A = 5 = \sup A.$$

Entsprechend sieht man die Aussage für -2 ein:

- -2 ist untere Schranke von A nach Definition von A.
- -2 ist grösste untere Schranke von A, da es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ gibt derart, dass

  $$-2 < x < -2 + \varepsilon.$$

  Wähle z. B. $x = -2 + \frac{\varepsilon}{2}$.
- -2 ist kein Minimum von A, weil $-2 \notin A$.

$$A = (-2, 5]$$

b) Für die Menge $B = \{x \mid x^2 < 5\}$ gilt:

$$\sup B = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \inf B = -\sqrt{5},$$

aber $\sqrt{5}$ ist kein Maximum von B, weil $\sqrt{5} \notin B$. Entsprechend ist $-\sqrt{5}$ kein Minimum von B, weil $-\sqrt{5} \notin B$. Dazu beachten wir, dass gilt:

$$B = \{x \mid x^2 < 5\} = \{x \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$$

und benutzen die gleiche Argumentation wie in a)!

$$B = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$$

c) Für die Menge $C = \{x \mid 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$ gilt schliesslich:

$$\sup C = \max C = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \inf C = \min C = -1.$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} 3 \leq 2x + 5 \leq 8 \ &\Leftrightarrow \ 0 \leq 2x + 2 \leq 5 \\ \Leftrightarrow \ -2 \leq 2x \leq 3 \ &\Leftrightarrow \ -1 \leq x \leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

woraus mit der Argumentation von a) die Behauptung folgt.

$$C = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$$

Aufgabe 14: Wie muss a gewählt werden, damit gilt:

$$(2 + h)^3 = 2^3 + ah + o(h) \quad \text{mit} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0\,?$$

LÖSUNG: Wir rechnen $(2+h)^3$ aus:

$$\begin{aligned}(2+h)^3 &= (2+h)^2(2+h)\\ &= (4+4h+h^2)(2+h)\\ &= 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3\\ &= 8+12h+6h^2+h^3\\ &= 8+\underbrace{12}_{a}h+\underbrace{h^2(6+h)}_{=o(h)}\end{aligned}$$

$\boxed{a=12}$!
oder $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$
$f(2)=2^3=8$, $f'(2)=3\cdot 2^2=3\cdot 4=12$
$\Rightarrow\ a=12$ (Def. der Ableitung/MWS!)