Aufgabe 15: Berechnen Sie die ersten Ableitungen:

a) $p(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$, b) $q(u) = (u^2 - 5)^8$,
c) $r(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2+1}}$, d) $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Aufgabe 16: a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2 - 1)^2$$

auf dem Intervall $[-2, 2]$.
b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 2x| \text{ ?}$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

Aufgabe 17: Die Sinus-Funktion ist gegeben durch die Reihe

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beweisen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Benutzen Sie für den Beweis das Quotientenkriterium.

Aufgabe 18: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, d.h. die Funktion f selber ist differenzierbar und ihre erste Ableitung f' stetig. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle x, dann hat f an der Stelle $x = a$ ein Minimum.

b) Ist f streng monoton wachsend, dann gilt für alle x die Ungleichung $f'(x) > 0$.

c) Hat f ein Minimum an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

d) Hat f ein Minimum an der Stelle $x_0 \in [a, b]$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

e) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

f) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, so ist f entweder konstant oder es gibt ein $\xi \in (a, b)$, so dass f an der Stelle ξ ein Maximum oder ein Minimum hat.